

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXIII.

I. *Ueber eine neue Interferenzerscheinung;*
von Otto Lummer.

(Hierzu Taf. VII Fig. 1—8.)

Als ich im Frühjahr 1883 im hiesigen physikalischen Laboratorium mit dem Spectrometer arbeitete, um die Winkel des Fresnel'schen Biprismas zu bestimmen, sah ich bei Senkrechtstellung des Fernrohres mittelst des Gauss'schen Oculars auf die Prismenflächen neben dem gespiegelten Fadenkreuz immer noch eine ganze Anzahl feiner Interferenzstreifen auftreten, deren Entstehung ich mir nicht auf bekannte Weise erklären konnte. Die nähere Untersuchung dieser Interferenzerscheinung, welche ich auf Veranlassung meines hochverehrten Lehrers, Herrn Geheimrath Prof. v. Helmholtz, anstellte, führte zur vorliegenden Arbeit, welche mitzutheilen mir gestattet sei.

Erscheinung.

Die von der Sonne oder einer beliebigen Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen σ (Fig. 1) fallen auf die planparallele Glasplatte P , von welcher sie nach der achromatischen Linse L von ziemlich grosser Brennweite (20—50 cm) reflectirt werden. In der Linse L gebrochen, gehen die Strahlen weiter bis zum Silberspiegel R , der senkrecht zur optischen Axe der Linse L stehen möge. Es werden dann die nahe der optischen Axe verlaufenden Strahlen nach L zurückgeworfen und gelangen nach dem Austritt aus L zurück zur Platte P , wo sie theils reflectirt, theils hindurchgelassen werden. Betrachten wir vorerst letztere, so mögen dieselben durch die zu L centirte Linse O direct in das hinter derselben befindliche Auge A gelangen. Ist dann O

genau auf die Brennebene F von L eingestellt, und befindet sich in derselben ein Fadenkreuz, so bietet sich dem Auge A folgende Erscheinung dar.

Neben dem wirklichen Fadenkreuze erscheint ein an R gespiegeltes, welches genau mit dem wirklichen zusammenfällt, sobald R senkrecht auf OL steht; außerdem aber ist das Gesichtsfeld von einer Anzahl Interferenzstreifen durchzogen, welche, parallel laufend der Durchschnittslinie von Platte und Spiegel, bei natürlichem Lichte farbig, bei monochromatischem Lichte dagegen abwechselnd hell und dunkel sind. Die Erscheinung ist symmetrisch zu einem hellen Centralstreifen, sodass die farbigen Streifen Ähnlichkeit haben mit den am Fresnel'schen Spiegel auftretenden. Eine unsere Erscheinung ganz besonders auszeichnende Beziehung ist aber die Veränderung des Abstandes der Streifen mit der Entfernung des Spiegels von der Linse. Besteht sich nämlich der Spiegel R nahe der Linse L , so ist der Streifenabstand so klein, und infolge dessen sind die Streifen so fein, dass dieselben kaum sichtbar; je grösser aber RL , um so weiter entfernen sich die Streifen voneinander, bis, wenn R in den Brennpunkt der Linse gekommen, der Streifenabstand so gross geworden, dass der weissliche Centralstreifen fast das ganze Gesichtsfeld einnimmt. Rückt jetzt der Spiegel noch weiter von L fort, so wiederholt sich das umgekehrte Schauspiel, die Streifen rücken mit zunehmender Entfernung des Spiegels wieder zusammen und verschwinden ob ihrer Feinheit schliesslich gänzlich der Wahrnehmung.

Analog, aber glanzvoller gestaltet sich die Erscheinung, wenn sie im reflectirten Lichte beobachtet wird. Um dies verwirklichen zu können, ändert man den Versuch folgendermassen um. Man lässt die von der Lichtquelle S (Fig. 1) ausgehenden Strahlen σ nicht direct auf P auffallen, sondern von einer Glasplatte G nach P reflectiren. Die auf dem früher beschriebenen Wege nach L , R und zurück nach P gelangenden Strahlen werden hier, wie schon erwähnt, theils reflectirt, kommen nach G zurück, gehen durch G hindurch, und dringen in das hinter G befindliche Auge. Wenn

letzteres passend accommodirt, wird es wiederum, aber viel deutlicher und schöner, die Interferenzstreifen sehen, deren Beziehung zum Spiegelabstand RL dieselbe ist, wie diejenige der im durchgehenden Lichte erzeugten Streifen. Um hier genau den Ort zu bestimmen, an welchem die Streifen entstehen, bediente ich mich folgenden Mittels, welches für uns später noch in anderer Beziehung von grossem Nutzen sein wird. An die Stelle des Auges wurde ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr T gebracht, an dessen Rohr unmittelbar vor dem Objectiv eine zweite achromatische Linse (λ) befestigt war. Bei dieser Anordnung können durch das Fernrohr nur solche Gegenstände wahrgenommen werden, welche sich in der Brennweite der Linse λ befinden. Hat man also die Streifen mittelst Fernrohres aufgesucht und verschiebt eine feine Nadel längs des Weges λPL , bis dieselbe mit den Streifen zugleich in T deutlich sichtbar wird, so bezeichnet die Nadel den Ort der Streifen. Es befindet sich der Ort zwischen P und G . Dann treten ausser der wirklichen Nadel noch vier Spiegelbilder derselben auf, von denen die beiden mittleren sich nahezu decken, und, was für uns von Wichtigkeit, gleichsam die Streifen überlagern, während umgekehrt die beiden äusseren Bilder von den bunten Streifen durchbrochen sind. Daraus folgt erstens, dass die Nadel und somit die Streifen im ersten Brennpunkte der Linse L befindlich sind, zweitens aber, dass nur solche Strahlen zur Interferenz kommen, die denselben Verlauf nehmen würden, wie die die mittleren zusammenfallenden Bilder der Nadel erzeugenden Strahlen, falls die Nadel nicht da wäre. Es wird Aufgabe des theoretischen Theiles dieser Arbeit sein, zu erforschen, welches diese Strahlen sind. Verschiebt man die Platte P parallel zu sich selbst, so ändert sich die Interferenzerscheinung ebensowenig, wie der Ort derselben. Immer muss die Bedingung gelten, $LP + P\lambda =$ der Summe der Brennweiten der Linsen L und λ . Kommt P gerade nach F , dem ersten Brennpunkte von L , so scheinen die Streifen auf der Oberfläche von P fest zu haften, welche mit ihren Ritzen und Schrammen zugleich deutlich sichtbar wird. Besteht sich P ausserhalb der Brennweite PL , so tritt nur

ein Spiegelbild einer in F befindlichen Nadel auf; die Interferenzerscheinung ist dieselbe wie vorher. — Schliesslich sei noch bemerkt, dass das Bestreichen der Hinterfläche von P mit Asphaltlack, wodurch derselben ihre Reflexionskraft genommen wird, stets das Verschwinden der Streifen zur Folge hat, während das Belegen dieser Fläche den Glanz der Erscheinung um Bedeutendes erhöht.

Theorie.

Da beide Flächen der Platte P mitwirken, kommen hauptsächlich vier Lichtantheile in Betracht. Jeder vom leuchtenden Punkte S (Fig. 2) ausgehende Strahl SA nämlich theilt sich gemäss der Reflexion an der Vorder- und Hinterfläche von P in unzählig viele einander parallel laufende Strahlen, von denen wir nur die beiden ersten (α und β) verfolgen wollen, insofern die übrigen äusserst lichtschwach sind. Durch die Linse L in dem Punkte B der zweiten Brennebene von L vereinigt, gelangen α und β an den Silberspiegel R . Dort werden sie so reflectirt, als ob sie von C kämen, dem Spiegelpunkte von B in Bezug auf R . Nach dem Austritt aus der Linse L sind demnach α und β beide nach dem zu C conjugirten Punkte D gerichtet. Ehe aber α und β nach dorthin gelangen, treffen sie auf die Platte P , wo jeder theilweise reflectirt und gebrochen wird, sodass sich α in die parallelen Strahlen α_1 und α_2 und β in die parallelen Strahlen β_1 und β_2 zerlegt. Analog dem Strahle SA erzeugt ein jeder von S ausgehende Strahl vier Strahlen α_1 , α_2 , β_1 und β_2 ; im allgemeinen werden somit vier Bilder von S auftreten müssen, deren gegenseitiger Abstand sowohl von der Dicke der Platte P , der Entfernung des Spiegels R , als der Lage des Lichtpunktes S abhängen wird.

Dem früher Gesagten gemäss interferieren diejenigen Strahlen miteinander, welche die mittleren Bilder erzeugen, also Strahlen wie α_2 und β_1 . In der That zeichnen sich α_2 und β_1 dadurch vor den übrigen aus, dass beide nahezu einen gleich grossen Weg durch Glas zurückzulegen haben. Während nämlich β_1 beim Hingang zur Linse durch die Platte gegangen, beim Rückweg aber direct reflectirt wor-

den ist, ist umgekehrt α_2 erst direct reflectirt und hat dann die Platte durchsetzt. Alle übrigen Lichtantheile unterscheiden sich durch eine Wegdifferenz im Glas von mehr denn der doppelten Dicke der Platte; α_1 und β_2 sogar durch eine solche von mehr denn der vierfachen Plattendicke. Dass aber die Unterschiede der im Glas zurückgelegten Wege massgebend sind, geht daraus hervor, dass, wie leicht einzusehen, alle von α_1 , α_2 , β_1 und β_2 , in Luft zurückgelegten Wege einander absolut gleich sind, wenn der Spiegel R im Brennpunkte (F) von L steht. In diesem speciellen Falle ist der Wegunterschied von α_2 und β_1 Null, der zwischen je zwei anderen Strahlen viele 1000 Wellenlängen, soviel eben Wellenlängen auf die doppelte resp. vierfache Plattendicke kommen. Da nun die Interferenzstreifen bei Anwendung weissen Lichtes auftreten, können dieselben bekanntlich nur von Strahlen mit geringer Wegdifferenz gebildet werden. Es kann somit gar kein Zweifel übrig bleiben, dass Strahlen wie α_2 und β_1 es sind, denen die Erscheinung ihre Entstehung verdankt. Unsere Aufgabe ist demnach die, zu berechnen, welches bei beliebiger Stellung des Spiegels, der Platte etc. die Phasendifferenz im Schnittpunkte zweier den Strahlen α_2 und β_1 analog verlaufender Strahlen ist.

Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung des allereinfachsten Falles, wo die beiden Strahlen bis zu ihrem Schnittpunkte in einer und derselben Ebene verlaufen. Es ist diese Ebene die durch die optische Axe der Linse L gelegte Lothebene von Platte und Spiegel, welche wir zur Ebene der Zeichnung machen wollen. Dann sei LF (Fig. 3) die Axe der Linse L , deren zweiter Brennpunkt in F liege; senkrecht dazu stehe der Spiegel R , während die Normale der bei P befindlichen Platte einen bestimmten Winkel (φ) mit ihr einschliesse. Wir müssen zwei Fälle voneinander unterscheiden, nämlich: $RL >$ und $RL < FL$; ersteren behandeln wir zuerst. Zur Vereinfachung nehmen wir noch an, die auf P auffallenden Strahlen kämen von einem unendlich fernen leuchtenden Punkte, d. h. sie ließen einander parallel. Es ist diese Annahme erlaubt, da die Erscheinung ganz dieselbe bleibt, ob man eine irdische Lichtquelle oder die Sonne als

solche anwendet. Dann wollen wir uns den Einfallswinkel der Strahlen so gewählt denken, dass sie parallel der optischen Axe von der Platte nach der Linse reflectirt werden. Es seien S_r und S_s zwei von dem unendlich fernen leuchtenden Punkten S kommende Strahlen, von denen ersterer bei r direct nach h reflectirt werde, während S_s bei s nach dem Innern der Platte gebrochen, bei q von deren Hinterfläche nach k gespiegelt und dort parallel dem Strahle rh nach g abgelenkt werde. g und h seien die Schnittpunkte der Strahlen mit der zweiten Hauptebene der Linse L . Laut Voraussetzung ist rh und $hg \parallel PL$; die Linse vereinigt die Strahlen rh und kg demnach in ihrem zweiten Brennpunkte F , wo sich die beiden Strahlen durchkreuzen, um ihren Weg ungestört bis zum Spiegel R fortzusetzen, den sie resp. in den Punkten x und y treffen mögen. Wir hätten nun die in x und y gespiegelten Strahlen weiter zu verfolgen bis zu dem Punkte, in welchem sie sich schneiden, nachdem sie von L gebrochen, der der optischen Axe zunächstlaufende an der Platte direct reflectirt worden ist, der andere aber zweimal die Platte durchsetzt hat, und für diesen Schnittpunkt die Phasendifferenz zu berechnen. Statt dessen können und wollen wir so verfahren: Wir konstruiren uns in Bezug auf R die Spiegelbilder der Linse L und der Platte P ; dieselben seien L_1 und P_1 , sodass $RL_1 = RL$ und $RP_1 = RP$ ist; betrachten L_1 und P_1 als wirklich gegeben, verlängern, als ob der Spiegel gar nicht vorhanden wäre, die Strahlen Fx und Fy bis L_1 und suchen die Phasendifferenz der aus L_1 austretenden Strahlen 1 und 2 in demjenigen Punkte, in welchem sie wieder zusammentreffen, nachdem 2 an P_1 direct reflectirt worden, 1 aber zweimal durch P_1 gegangen ist. Es leuchtet von selbst ein, dass wir auf die letzte Art ganz dieselbe Phasendifferenz erhalten als vorher, indem von x und y an der Verlauf der Strahlen im zweiten Falle das Spiegelbild des Verlaufes im ersten, bis zu x und y aber in beiden Fällen der Weg ganz derselbe ist. Weswegen wir den zuletzt angegebenen Weg einschlagen, wo vom Spiegel ganz abstrahirt werden kann, wird später klar werden. Um die Phasendifferenz zu berechnen, verfolgen wir den Gang der von F

nach L_1 gehenden Strahlen genauer. Sind m_1 und n_1 die Schnittpunkte der Strahlen mit der ersten Hauptebene von L_1 , so gehen sie von da parallel der optischen Axe bis zur zweiten Hauptebene von L_1 ; die Schnittpunkte seien m und n . Da $FL_1 > \mathfrak{F}L_1$, die Brennweite der Spiegellinse (L_1), so werden die Strahlen durch die Linse wirklich vereinigt im Punkte B , welches der conjugirte Punkt zu F in Bezug auf die Spiegellinse und somit der zweite Hauptbrennpunkt des Systems beider Linsen ($L + L_1$) ist. Befindet sich, wie wir annehmen wollen, die Platte P innerhalb der Brennweite von L , so liegt auch P_1 innerhalb $L_1 E$; die nach B gehenden Strahlen mB und nB werden also die Vorderfläche von P_1 treffen, noch ehe sie in B ankommen. Der Bedingung gemäss werde md bei d gespiegelt, na gehe dagegen nach b , werde dort gespiegelt nach c und hier austretend aus der Platte, vereinige er sich bei u_1 mit dem von d kommenden Strahle. Die Phasendifferenz in u_1 ist zu suchen. Da nun die Phasendifferenz zweier Strahlen nichts weiter ist als die Differenz ihrer optischen Längen, so müssen wir die optischen Längen der Strahlen $Srhndcu_1$ und $Ssqkgmdu_1$ berechnen. Die scheinbar langwierige Rechnung wird bedeutend vereinfacht durch Benutzung des von v. Helmholtz¹⁾ abgeleiteten Satzes über die optischen Längen zweier Strahlen, welcher aussagt, dass, wenn Lichtstrahlen von einem Punkte ausgegangen und durch beliebig viele Flächen von continuirlicher Krümmung gebrochen worden sind, sie nach der letzten Brechung senkrecht stehen auf jeder krummen Fläche, für deren sämmtliche Punkte die optische Länge des Strahles einen constanten Werth hat. Errichten wir also in k eine Senkrechte zum Strahle kg , welche auch auf rh senkrecht steht und letzteren Strahl in i schneiden möge, so haben Fhi und Fgh gleiche optische Längen. Ebenso die Strahlen Fml und Fna , wenn l der Schnittpunkt des Strahles mB mit dem um B als Centrum und der Strecke aB als Radius beschriebenen Kreise ist. Schliesslich ist noch $Sr = St$, wenn rt senkrecht auf Sr und Ss , sodass wir für die Phasendifferenz (Δ) im Punkte u_1 erhalten:

1) v. Helmholtz, Wissensch. Abhdl. 2. p. 148.

$A = st + 2n.qs + ld + du_1 - [ri + 2n.ab + cu]$;
 wo n den Brechungsindex der Platte bedeutet. In diesen Ausdruck führen wir noch einige andere Zeichen ein, und zwar wollen wir nennen d die Dicke der Platte, e den Einfallswinkel der Strahlen Sr oder Ss , welcher nach unserer Annahme gleich ist dem Winkel (φ) zwischen der Platten-normale und der optischen Axe, b den zugehörigen Brechungswinkel, ferner e_1 , e_2 und b_1 , b_2 die Einfalls- und Brechungswinkel resp. der Strahlen na und md . Wie leicht aus der Fig. 8 abzuleiten ist, gelten dann folgende Beziehungen: Es ist: $qs = (d/\cos b)$; $ab = (d/\cos b_1)$; $ri = rk \sin e$ und $st = rs \cdot \sin e = (rk - sk) \sin e = rk \sin e - 2d \operatorname{tg} b \sin e$. Demnach wird: $A = (2nd/\cos b) - 2d \operatorname{tg} b \sin e - (2nd/\cos b_1) + ld + du_1 - cu_1$. Um die noch übrig bleibende Strecke $ld + du_1 - cu_1$ durch die eingeführten Zeichen auszudrücken, müssen wir erst folgende Construction machen. Wir tragen du_1 von d auf dem Strahle dB ab bis u ; verbinden c mit u und verlängern diese Verbindungsline bis sie die in B \parallel zur Platte gezogene Linie in v trifft. Da du_1 und du mit dP_1 , der Vorderfläche der Platte, denselben Winkel ($90 - e_2$) einschliessen, so ist u der Spiegelpunkt von u_1 in Bezug auf dP_1 ; demnach auch $cu = cu_1$ und, da $\not\prec u_1 c P_1 = 90 - e_1 = \not\prec P_1 a B$, und $\not\prec u_1 c P_1 = \not\prec P_1 c u$ ist, so läuft $cu \parallel aB$. Laut Construction ist $Bv \parallel ac$. Es sind also ac und Bv Parallele zwischen Parallelen, woraus folgt: $cv = aB$ und $ac = Bv$. Darnach wird unser Ausdruck: $ld + du_1 - cu_1 = lu - cu$, wofür wir schreiben wollen: $lB - uB - (cv - uv) = uv - uB$. Sowohl uv als uB ist Seite des Dreicks uvB . Mittelst des Sinussatzes erhalten wir daher:

$$uv = \frac{Bv \sin uBv}{\sin Buv}; \quad uB = \frac{Bv \sin Buv}{\sin Buv},$$

worin zu setzen ist:

$$\not\prec uBv = \not\prec mdP_1 = e_2 \quad \not\prec Buv = \not\prec du = e_1 - e_2; \\ \not\prec uvB = \not\prec u c P_1 = e_1 \quad \text{und } Bv = 2d \operatorname{tg} b_1,$$

sodass wird:

$$ld + du_1 - cu_1 = 2d \operatorname{tg} b_1 \frac{\cos e_2 - \cos e_1}{\sin (e_1 - e_2)}$$

und somit:

$$\mathcal{A} = \frac{2ad}{\cos b} - \frac{2d \sin b}{\cos b} \sin \epsilon - \frac{2ad}{\cos b_1} + 2d \operatorname{tg} b_1 \frac{\cos \epsilon_2 - \cos \epsilon_1}{\sin(\epsilon_1 - \epsilon_2)};$$

$$\mathcal{A} = \frac{2d}{\cos b} (n - \sin \epsilon \sin b) - \frac{2d}{\cos b_1} \left(n - \sin b_1 \frac{\cos \epsilon_2 - \cos \epsilon_1}{\sin(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \right).$$

Nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz ist:

$$n = \frac{\sin \epsilon}{\sin b} = \frac{\sin \epsilon_1}{\sin b_1} = \frac{\sin \epsilon_2}{\sin b_2},$$

woraus folgt:

$$n \cdot \cos b = \sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon} \quad \text{und} \quad \cos n \cos b_1 = \sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon_1};$$

benutzen wir diese Werthe, so erhalten wir für die Phasendifferenz in u_1 :

$$\mathcal{A} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon} - \frac{2dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon_1}} \left(n - \frac{\sin \epsilon_1 (\cos \epsilon_2 - \cos \epsilon_1)}{n \sin(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \right).$$

Eine sehr wesentliche Vereinfachung dieses Ausdrückes erzielen wir durch Einführung der Winkel, welche die Strahlen mB und nB mit der optischen Axe BL, L des Systems bilden, und zwar sei:

$$\angle mBL = \epsilon_2 \quad \text{und} \quad \angle nBL = \epsilon_1.$$

Dann gilt: $\epsilon_2 = \varphi + \epsilon_3$ und $\epsilon_1 = \varphi + \epsilon_1$ und folglich wird, da der Voraussetzung gemäss: $\epsilon = \varphi$ sein soll, die Phasendifferenz:

$$\mathcal{A} = 2d \left[\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi + \epsilon_1)}} \left(n^2 - \frac{\sin(\varphi + \epsilon_1) [\cos(\varphi + \epsilon_2) - \cos(\varphi + \epsilon_1)]}{\sin(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \right) \right].$$

Dieser Werth für \mathcal{A} ist scheinbar complicirter denn der vorherige. Bedenken wir aber, dass ϵ_1 und ϵ_2 nur sehr kleine Winkel sein können, so dürfen wir über diese Winkel Annahmen machen, welche unsren letzten Ausdruck für \mathcal{A} auf einen äusserst einfachen reduciren. In der That sind ϵ_1 und ϵ_2 gleich Null, wenn RF , der Abstand des Spiegels vom Brennpunkte der Linse L , gleich Null ist, während bei einer Entfernung von $RF = \frac{3}{4}$ der Brennweite von L , letztere zu 30 cm genommen, der grösstmögliche Werth von E je nach dem Radius der Linsenöffnung nur 1° bis 2° beträgt. Bei solch'

grossem Spiegelabstande sind die Streifen ob ihrer Feinheit und ihres winzigen Abstandes aber überhaupt kaum noch sichtbar. Für die der Messung zugänglichen und deutlich sichtbaren Streifen wird in Δ also:

$$\sin \varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad \cos \varepsilon_1 = 1, \quad \sin \varepsilon_2 = \varepsilon_2, \quad \cos \varepsilon_2 = 1$$

zu setzen erlaubt sein, wodurch $\sin(\varphi + \varepsilon_1) = \sin \varphi + \varepsilon_1 \cos \varphi$, $\sin^2(\varphi + \varepsilon_1) = n^2 - \sin^2 \varphi - \varepsilon_1 \sin 2\varphi$, und

$$\frac{\cos(\varphi + \varepsilon_2) - \cos(\varphi + \varepsilon_1)}{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} = \frac{0}{0} = \sin \varphi + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \cos \varphi$$

wird. Den in Δ auftretenden Factor:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi - \varepsilon_1 \sin 2\varphi}} = (n^2 - \sin^2 \varphi - \varepsilon_1 \sin 2\varphi)^{-1/2}$$

können wir dann nach aufsteigenden Potenzen von ε_1 entwickeln, von denen die zweiten und höheren Potenzen unserer Annahme gemäss fortzulassen sind. Nach einigen leicht auszuführenden Zwischenrechnungen erhalten wir schliesslich:

$$\Delta = \frac{d \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{d \sin 2\varphi}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Eine analog dieser durchzuführende Rechnung für den Fall, dass beide auf L auffallenden Strahlen unterhalb der optischen Axe verlaufen, ergibt für die Phasendifferenz Δ in deren Schnittpunkt:

$$\Delta = - \frac{d \sin 2\varphi}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Liegt nur g unterhalb, h aber oberhalb L , laufen also die beiden Strahlen zu beiden Seiten der optischen Axe, so wird:

$$\Delta = \frac{d \sin 2\varphi}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Ganz allgemein ist demnach die Phasendifferenz in dem Schnittpunkte zweier der Axe paralleler Strahlen, welche den bewussten Gang zurückgelegt haben:

$$\Delta = \frac{d \sin 2\varphi}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2),$$

wo das Plus- oder Minuszeichen zu nehmen, je nachdem der zu ε gehörige Stahl vor der Linse L oberhalb oder unterhalb der optischen Axe läuft.

Ehe wir irgendwelche Discussionen an unserer für Δ ge-

wonnene Gleichung knüpfen, wollen wir letztere noch zweckentsprechend umzugestalten suchen. Dazu bietet uns die durch Beobachtung festgestellte Thatsache, dass sich die Streifen in der Brennebene der Linse entwickeln, die beste Gelegenheit. Ziehen wir demnach die in P_1 (Fig. 3) gespiegelte optische Axe P_1E_1 , machen $P_1E_1 = PE$, sodass E_1 der Brennpunkt der Linse L_1 längs $L_1P_1E_1$ ist, dann muss der Betrachtung zufolge u_1 ein Punkt der durch E_1 gelegten, senkrecht auf P_1E_1 stehenden Brennebene der Linse sein.

Wie leicht einzusehen, muss alles, was für u_1 in Bezug auf E_1 und P_1E_1 gelten möge, auch für u in Bezug auf E und P_1EB Giltigkeit haben. Der Bequemlichkeit halber wollen wir alle unsere folgenden Betrachtungen für letzteren Punkt anstellen und so verfahren, als ob u wirklich der Schnittpunkt von mdu und $nabcu$ wäre. Es sind dann einfach die für die Ebene Eu gefundenen Resultate auf die Brennebene E_1u_1 zu übertragen.

Mitteilt der Thatsache, dass u ein Punkt der durch E gehenden Brennebene ist, können wir nun leicht ε_1 und ε_2 und damit auch die Phasendifferenz Δ als Funktionen der Brennweite der Linse L und des Abstandes RF des Spiegels vom zweiten Brennpunkte von L darstellen.

Wir gehen dazu aus von der Betrachtung eines zusammengesetzten Systems centrirter Linsen. Dasselbe bestehe aus zwei centrirten optischen Systemen A und B (Fig. 4), welche dieselbe Axe haben. Es seien p_1 und p_2 die beiden Brennpunkte, a_1 und a_2 die beiden Hauptpunkte des Systems A ; π_1 und π_2 die Brennpunkte, α_1 und α_2 die Hauptpunkte von B . Der Abstand $a_2\alpha_1$ sei d ; die Hauptbrennweiten des ersten Systems a_1p_1 und a_2p_2 bezeichnen wir mit f_1 und f_2 , die des zweiten $a_1\pi_1$ und $a_2\pi_2$ mit φ_1 und φ_2 .

Der erste Brennpunkt (t_1) des combinirten Systems ist dann das Bild, welches A von π_1 , der zweite Brennpunkt (t_2) dasjenige, welches B von p_2 entwirft. In der That vereinigen sich alle von t_1 ausgehenden Strahlen nach der Brechung im ersten Systeme A in π_1 und treten aus dem zweiten Systeme B parallel zur optischen Axe aus, während alle parallel der optischen Axe auf A auffallende Strahlen sich in p_2 durch-

kreuzen und vom System *B* in t_{∞} vereinigt werden. Nach von Helmholtz¹⁾ gilt dann:

$$a_1 t_1 = \frac{(d - \varphi_1) f_1}{d - \varphi_1 - f_1} \quad \text{und} \quad a_2 t_{\infty} = \frac{(d - f_2) \varphi_2}{d - \varphi_1 - f_1}.$$

Sind ferner r_1 und r_{∞} die beiden Hauptpunkte des combinirten Systems, deren gemeinsames im mittleren Medium gelegenes Bild *s* sei, so gilt auch nach ihm:

$$a_1 r_1 = \frac{d f_1}{d - \varphi_1 - f_1} \quad \text{und} \quad a_2 r_{\infty} = \frac{d \varphi_2}{d - \varphi_1 - f_1}.$$

Diese Werthe nehmen nun eine bedeutend einfachere Gestalt an für den speciellen Fall, dass *A* und *B* zwei identische optische Systeme sind, welche sich in einem und demselben Medium befinden. Ein Beispiel hierfür ist der von uns betrachtete Fall, wo *A* und *B* durch die beiden gleichen Linsen *L* und *L*₁ repräsentirt werden, die rings von Luft umgeben sind. Dann ist zu setzen: $a_1 p_1 = a_2 p_2 = a_1 \pi_1 = a_2 \pi_2$, und wir erhalten, wenn wir diese den Linsen *L* und *L*₁ gemeinschaftliche Brennweite mit *f* und ferner den Abstand beider $d = 2LF + 2RF = 2f + 2e$ bezeichnen:

$$a_1 t_1 = \frac{(d - f)f}{d - 2f} = a_2 t_{\infty} = \frac{f^2}{2e} + f \quad \text{und} \quad a_2 r_1 = a_2 r_{\infty} = \frac{f^2}{e} + f.$$

Ferner ist *s* die Mitte von *LL*₁, und somit ist das Bild des Spiegels *R* (Fig. 3) entworfen von *L*₁ die zweite, entworfen von *L* dagegen die erste Hauptebene des combinirten Systems (*L* + *L*₁).

In unserem speciellen Falle der Combination zweier Linsen in Luft von ganz derselben Brennweite gilt aber noch eine Beziehung, die für uns, wie wir sehen werden, von der grössten Bedeutung ist. Ganz allgemein besteht für einen von t_{∞} (Fig. 4) ausgehenden Strahl $t_{\infty} m_3 m_1 g_2 g_1 \infty$ die Relation:

$$a_2 g_2 = \frac{a_1 m_1 \cdot a_2 p_2}{a_1 p_2} = \frac{u \pi_2 \cdot a_2 t_{\infty} \cdot a_2 p_2}{\pi_2 t_{\infty} \cdot a_1 p_2},$$

wenn *u* der Schnittpunkt dieses Strahles mit der durch π_2 gelegten zweiten Brennebene des Systems *B* ist. Ist nun $a_1 p_1 = a_2 p_2 = a_1 \pi_1 = a_2 \pi_2 = f$ und $d = 2(f + e)$, so wird nach dem vorigen:

1) v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abb. 2. p. 105 ff.

Nach

$$a_2 t_{\mu} = \frac{f^2}{2e} + f; \quad a_2 p_2 = f; \quad \pi_2 t_{\mu} = \frac{f^2}{2e}; \quad a_1 p_2 = f + 2e,$$

der Factor von $u\pi$, demnach:

$$\frac{a_2 t_{a_2} \cdot a_2 \pi_2}{\pi_2 t_{a_2} \cdot a_1 p_2} = \frac{\frac{f^2 + 2ef}{2e} \cdot f}{\frac{f^2}{2e} (f' + 2e)} = 1 \text{ und somit } a_2 g_2 = u \pi_2. \quad \square$$

Wir kehren jetzt zur Figur 3 zurück und wenden die zuletzt abgeleiteten Resultate an A passend zu transformieren. Gemäß dieser Resultate ist:

$$L_{\alpha}B = f + \frac{f^2}{2e},$$

sodass, wenn $L_E = f$, wie es laut Beobachtung der Fall:

$$BE = \frac{f^2}{2e}$$

wird. Dann ist aber auch $Eu = Lg$ und $Ez = Lh$, wo z der Schnittpunkt des verlängerten Eu mit dem Strahle nB ist, und wir können für die aus den Dreiecken BzE und BuE folgenden Werthe:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \frac{2e}{f^2} \cdot Ez \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \varepsilon_2 = \frac{2e}{f^2} \cdot Eu$$

auch schreiben:

$$\epsilon_1 = \frac{2e}{f^2} \cdot Lh, \quad \text{und} \quad \epsilon_2 = \frac{2e}{f^2} \cdot Lg.$$

Die für den Punkt u_1 berechnete Phasendifferenz war:

$$\Delta = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \alpha}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Setzen wir hierin die obigen für ε_1 und ε_2 gefundenen Werthe ein, so erhalten wir das Resultat.

$$A = \frac{d \cdot e \cdot \sin 2\varphi}{f^2 \sqrt{u^2 - \sin^2 \alpha}} (Lg + Lh).$$

Selbstverständlich muss auch hier Lg bezüglich Lh positiv oder negativ genommen werden, je nachdem g , resp. h ober- oder unterhalb L liegt.

Unser schliesslich für A abgeleiteter Werth ist insofern
äußerst einfach und interessant, als der darin auftretende
Factor $Eu + Ez = Lg + Lh$ nichts anderes ist, als der Ab-
stand zweier von der Mitte gleichweit entfernt liegender

Punkte der Erscheinung. Ist dies bewiesen, so ergibt sich aus der Phasendifferenzgleichung sofort, wie der Abstand zweier Streifen variiert mit der Änderung der Entfernung (ϵ) des Spiegels, der Dicke (d) der Platte etc. etc.

Bekanntlich ist nach dem Interferenzprinzip von Thomas Young im Punkte u ein Maximum oder Minimum der Helligkeit, je nachdem die Phasendifferenz in u ein gerades oder ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge des angewendeten Lichtes ist. Um daher den Ort der hellen und dunklen Streifen zu bestimmen, setzen wir:

$$A = \frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{s^2 - \sin^2 \varphi}} (Lg + Lh) = p \frac{\lambda}{2},$$

wo λ die Wellenlänge des Lichtes und p eine ganze positive oder negative Zahl bedeute. Bei einer bestimmten Stellung der Platte, des Spiegels und bei Anwendung einer gewissen Linse ist der Factor von $Lg + Lh$ constant. In diesem Falle ändert sich also A proportional $Lg + Lh$, und der Punkt, auf welchen sich A bezieht, ist um $Eu = -Lg$ von E entfernt, wenn auch hier die von E abgerechneten Strecken positiv oder negativ in Rechnung gezogen werden, je nachdem sie ober- oder unterhalb der optischen Axe liegen. Ist also Lg positiv, so ist Eu gleich gross, aber negativ und umgekehrt.

Es fragt sich nun, ob und für welchen Punkt A gleich Null wird. In derthat tritt dieser Fall ein, wenn $Lg = -Lh$, d. h. wenn die beiden Strahlen auf verschiedenen Seiten der optischen Axe und gleichweit von ihr entfernt auf die Linse L auftreffen. Die Grösse des Abstandes Lg der Strahlen von der optischen Axe ist aber bestimmt durch die Bedingung, dass der Schnittpunkt beider Strahlen, welchen wir C nennen wollen, ein Punkt der durch E gehenden Brennebene sein soll; dadurch ist dann zugleich die Entfernung CE gegeben, insofern gilt: $CE = -Lg = Lh$, d. h. insofern C soviel oberhalb E liegt, als g unterhalb L .

Damit u , der Schnittpunkt des beliebigen Strahlenpaars kg und rh in der Brennebene E liegt, muss die Bedingung erfüllt sein: $EL_u = BL_u - BE = f$.

Nun ist:

$$BL_{\prime \prime} = f + \frac{f^2}{2e} \quad \text{und} \quad BE = \frac{uz}{\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2} = \frac{uz}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \\ = \frac{uz \cdot f^2}{2e(Lh - Lg)} = \frac{uz \cdot f^2}{2e \cdot gh},$$

wo aber uz eine für jedes Strahlenpaar ganz bestimmte Grösse hat. Denn es ist:

$$uz = a \cdot c \cdot \cos \varepsilon_1 = 2d \operatorname{tg} b_1 \cos(\varphi + \varepsilon_1),$$

welcher Ausdruck mit Benutzung der früher eingeführten Vernachlässigungen schliesslich folgende Gestalt annimmt:

$$uz = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} + \varepsilon_1 \left(\frac{2d \cos 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} + \frac{2d \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \right).$$

Für bestimmte Werthe z. B. $d = 4$ mm, $n = 1,5$ und $\varphi = 45^\circ$ ist: $uz = 3,024 + \varepsilon_1 \cdot 0,8639$.

Darnach variiert uz also mit ε_1 , d. h. es ist verschieden für die verschiedenen Strahlenpaare. Da nun:

$$EL_{\prime \prime} = f + \frac{f^2}{2e} \left(1 - \frac{uz}{gh} \right) = f$$

sein soll, so muss $gh = uz$ werden; also muss auch gh verschieden sein, je nachdem der Abstand Lg des Strahlenpaars von der optischen Axe ein anderer ist.

Dennoch dürfen wir in dem für A gefundenen Werthe:

$$A = \frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (2Lg + gh),$$

$gh = uz$ als constant ansehen, welches auch der Werth von Lg sein möge. Der Grund hiervon ist folgender. Setzen wir für gh seinen Werth:

$$uz = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} + \varepsilon_1 \cdot K,$$

wo K die Klammergrösse bedeute, und für e/f^2 den früher abgeleiteten Werth $\varepsilon_1/2 \cdot Lh$ oder $\varepsilon_2/2 \cdot Lg$ ein, so können wir A schreiben:

$$A = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \left(2Lg + \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \right) \frac{\varepsilon_1}{2Lg} \\ + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{K d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \frac{1}{2Lg},$$

und, der Uebersicht wegen wieder die numerischen Werthe eingeführt:

$$\mathcal{A} = \frac{3,024}{2 \cdot Lg} (2Lg + 3,024) \varepsilon_2 + \frac{2,6}{2 \cdot Lg} \varepsilon_1 \varepsilon_2;$$

$$\mathcal{A} = \left(3,024 + \frac{4,572}{Lg} \right) \varepsilon_2 + 1,3 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{Lg}.$$

Für jeden Werth von Lg ist der Factor von $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ kleiner als der von ε_2 . Der Consequenz halber müssen wir demnach das zweite Glied gegen das erste vernachlässigen, weil wir es bei der Ableitung von \mathcal{A} gethan haben. In der That ist \mathcal{A} von der Ordnung der Wellenlänge unendlich klein. Das zweite Glied rechts ist aber ungefähr das Quadrat des ersten, also eine für uns ganz verschwindend kleine Grösse.

Ergibt sich somit, dass $gh = uz = (d \sin 2\varphi / \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})$ gesetzt werden darf¹⁾, so sind wir jetzt auch im Stande, die Entfernung CE anzugeben. Denn da $Lg + Lh = 2Lg + gh$, so ist $\mathcal{A} = 0$ für $Lg = -Lh = -(gh/2)$, und demnach ist $CE = -Lg = +(gh/2) = (d \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})$; für die eingeführten numerischen Werthe wird diese Grösse 1,512 mm. Um soviel liegt der Punkt C oberhalb der optischen Axe. Dass C der einzige Punkt ist, in welchem die sich schneidenden Strahlen keinen Gangunterschied haben, folgt sehr einfach daraus, dass für jeden Punkt u die Entfernung $Eu \geq EC$, also auch \mathcal{A} in u von Null verschieden ist, insfern ja $\mathcal{A} = (de/f^2)(\sin 2\varphi / \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})(2Eu + uz)$. Es lässt sich nun zeigen, dass in je zwei Punkten u , welche sich in gleichem Abstande von C , der eine aber oberhalb, der andere unterhalb der Axe befinden, die absolute Grösse der Phasendifferenz ganz dieselbe ist. Dazu betrachten wir neben dem in Fig. 3 gezeichneten Strahlenpaare rh und kg ein anderes, unterhalb der optischen Axe verlaufendes Paar $r_1 h_1$ und $k_1 g_1$, für welches gelten möge: $Lg = -Lh_1$ und $Lh = -Lg_1$; es ist dann von selbst $|g_1 h_1| = |gh|$, wo unter $|m|$ der absolute

1) Diese Grösse hat übrigens eine ganz gewisse Bedeutung. Ziehen wir nämlich von s (Fig. 3) eine Parallelle zum Strahle kg , so ist der senkrechte Abstand dieser beiden Strahlen, welche aus Ss entstehen, gerade $d \sin 2\varphi / \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$; unser obiges Resultat sagt also aus, dass wir Sr mit Ss zusammenfallen lassen dürfen, d. h. dass das zur Interferenz kommende Strahlenpaar aus einem einzigen einfallenden Strahle entsteht. Hierin ist auch der Grund dafür zu suchen, dass die Erscheinung so ganz unabhängig von der Entfernung der Lichtquelle ist.

Werth von m verstanden werde, sodass sich auch dieses zweite Paar in einem Punkte der Brennebene E schneidet. Dieser Schnittpunkt sei u_2 ; unserer früheren Resultate gemäss ist dann in u_2 :

$$\Delta_{u_2} = -\frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (Lh_1 + Lg_1);$$

fernern $Eu_2 = |Lg_1|$.

Das heisst also, in einem um $Eu_2 = Lh$ oberhalb E liegenden Punkte ist die Phasendifferenz dem absoluten Werthe nach gleich derjenigen im Punkte u , welcher unterhalb E um $Eu = Lg$ von E entfernt liegt.

Wir wollen sehen, welches der Mittelpunkt (C_1) des Abstandes uu_2 ist. Wie aus dem Vorhergehenden folgt, ist: $C_1E = (Eu_2 + (-Eu))/2$, also: $C_1E = (Lh - Lg)/2 = +gh/2$, d. h. der Punkt C_1 ist identisch mit dem Punkte C , in welchem $\Delta = 0$ ist. Ferner ist $uu_2 = |Eu_2| + |Eu| = |Lh| + |Lg| = |2Lg + gh|$, sodass unser Resultat, zu dem wir endlich gekommen, lautet:

„Die Phasendifferenz in gleichweite zu beiden Seiten von C liegenden Punkten u und u_2 ist ihrem absoluten Werthe nach einander gleich, und zwar ist sie: $d.e.\sin 2\varphi \cdot uu_2/f^2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$, wenn uu_2 den Abstand der beiden Punkte bedeutet.“

Wir wollen den Abstand der *pten* hellen oder dunklen homologen Streifen mit D_p bezeichnen. Gemäss dem letzten Resultate in Verbindung mit dem Young'schen Interferenzprincipe ist dann:

$$D_p = \frac{f^2 \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{d \cdot e \sin 2\varphi} \cdot p \frac{\lambda}{2},$$

wo p jede ganze Zahl sein kann. Je nachdem p gerade oder ungerade, ist D_p der Abstand zweier homologer Maxima oder Minima. Demnach verhalten sich bei bestimmter Stellung des Spiegels die Abstände der dunklen Streifen wie 1:3:5 etc., d. h. die Streifen sind äquidistant. Dies ist richtig für jeden Werth von e . Stets also ist der Abstand zweier beliebiger, benachbarter Minima gleich dem Abstande der ersten Minima voneinander, welchen wir kurzweg „Streifenabstand“ nennen und mit D bezeichnen wollen. Für diesen wird unsere obige Gleichung:

$$D = \frac{1 \cdot f^2}{2 d \cdot e} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{\sin 2\varphi},$$

welche aussagt, dass der Streifenabstand proportional ist der Wellenlänge des Lichtes, dem Quadrate der Brennweite der Linse und dem Ausdruck $\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}/\sin 2\varphi$, sich aber umgekehrt verhält wie die Dicke der Platte und die Entfernung des Spiegels vom Brennpunkte der Linse.

Bei einer dicken Platte sind demnach die Streifen enger aneinander, als bei einer dünnen, während sie bei rothem Lichte breiter erscheinen, als bei blauem oder violettem. Aus letzterem Grunde müssen bei Anwendung gemischten Lichtes farbige Streifen auftreten, die symmetrisch zu einem weissen Centralstreifen liegen und nach innen zu roth, nach aussen violett gefärbt sein müssen. Um die Aenderung des Streifenabstandes vom Winkel φ kennen zu lernen, müssen wir wissen, wie sich $\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}/\sin 2\varphi$ ändert mit φ . In einer früheren Abhandlung¹⁾ habe ich diesen Ausdruck schon einmal zu betrachten gehabt; wie dort bewiesen, wird derselbe ein Minimum für $\varphi = 48^\circ 57' 57''$, wenn $n = 1,53$ gesetzt wird. Darnach sind die Streifen am engsten, wenn φ ca. 48° , und sie werden weiter, sowohl wenn φ grösser, als wenn φ kleiner denn ca. 48° . Am interessantesten von allen Beziehungen ist jedoch die Abhängigkeit des Streifenabstandes von der Entfernung des Spiegels vom Brennpunkte der Linse. Für $e = o$ ist $D = \infty$, d. h. wenn der Spiegel im Brennpunkte steht, treten gar keine Streifen auf. Sowie e einen gewissen Werth erreicht, ist D so klein geworden, dass im Gesichtsfelde Streifen erscheinen. Ihr Abstand ist verkehrt proportional e . Treten z. B. für $e = 1$ cm vier Streifen auf, so für $e = 2$ cm acht; für 3 cm 16 Streifen etc. bis für $e = \infty$. $D = o$ geworden, d. h. unendlich viele Streifen auftreten.

Einen dem meinigen sehr ähnlichen, aber, wie ich annehmen muss, von demselben wesentlich verschiedenen Versuch hat Hr. Mascart angestellt und beschrieben.²⁾ Auch er benutzt in derselben Anordnung Spiegel, Objectivlinse und

1) O. Lummer, Wied. Ann. 23. p. 49 ff. 1884.

2) Mascart, Ann. de chem. et de phys. 23. p. 149 ff. 1871.

Platte. Aber seiner Theorie nach, welche mit der obigen in directem Widerspruch stünde, falls sein Versuch mit dem mei-nigen identisch wäre, kommen erst dann Streifen zu Stande, wenn mittelst eines Fernrohres beobachtet wird. Denn er sagt p. 150: „Alle parallel zur optischen Axe der Objectiv-linse verlaufenden Strahlen werden im Brennpunkt (k) con-vergiren; nachdem sie am Spiegel reflectirt worden sind, werden sie von k' divergiren (k' ist der Spiegelpunkt von k) und von neuem das Objectiv durchsetzend, treffen sie con-vergent auf die Platte auf. Die verschiedenen Strahlen, welche dieses Bündel zusammensetzen, werden nicht dieselben Einfallswinkel haben, aber nichtsdestoweniger werden sie nach dem Gesetz der Refraction unter sich con-cordant sein in demjenigen Punkte, wo die Be-obachtungslinse sie vereinigen wird etc.“ Weiter sagt er, dass alle parallel der optischen Axe auffallenden Strahlen den Centralstreifen, alle parallel einer anderen Richtung auffal-lenden Strahlen einen gewissen anderen Streifen bilden. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Streifen nicht wie bei uns im Focus der Objectivlinse, sondern dort auftreten, wo die von der Platte zurückkehrenden Strahlen vereinigt werden von einer zweiten Linse, der Beobachtungslinse. Uebrigens scheint Hr. Mascart nur dann Streifen gesehen zu haben, wenn der Spiegelabstand e sehr klein war, denn nur unter dieser beschränkenden Annahme berechnet er die Phasendifferenz; experimentelle Bestimmungen aber fehlen ganz. Leider ist es mir nicht gelungen, mittelst der aus Hrn. Mascart's Theorie zu folgender Beobachtungsweise Streifen zu erhalten.

Wie bei der Beschreibung der Erscheinung erwähnt, bleibt letztere ungeändert, in welcher Entfernung auch die Platte P von der Linse stehen möge, wenn nur ihre Nei-gung gegen die optische Axe dieselbe bleibt. In der That ist die Phasendifferenz im Schnittpunkte zweier Strahlen auch unabhängig von der Entfernung $L_1 P_1 = LP$, sodass damit schon die Richtigkeit der beobachteten Thatsache erwiesen ist.

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man für die ver-schiedenen Entfernungen der Platte ein und dasselbe Strahlen-

paar bis zu seinem Schnittpunkte u_1 verfolgt und die Phasendifferenz daselbst berechnet. Wie der Verlauf der Strahlen in dem Falle ist, wo sich die Platte ausserhalb der Brennweite der Linse befindet, zeigt Fig. 5. Die interferierenden Strahlen gehen jetzt divergent von der Platte so, als ob sie von u kämen.

Wir kommen jetzt zu dem Fall, dass der Spiegel innerhalb LF , der Brennweite der Linse L steht. Der Abstand des Spiegels R (Fig. 6) von dem Brennpunkte F der Linse werde wieder mit e bezeichnet, aber negativ gerechnet. Ist dann L_1 das Spiegelbild von L und P_1 dasjenige von P in Bezug auf den Spiegel R , sodass $RL = RL_1$ und $PR = P_1R$ ist, so ist der Verlauf zweier parallel PL auf L auftreffender Strahlen, wie ihn Fig. 6 darstellt. Die in F sich schneidenden Strahlen treten aus L_1 divergent aus, und zwar scheinen sie von B , dem zu F in Bezug auf L_1 conjugirten Punkte zu kommen. Nach dem Austritt werde wieder derjenige Strahl an der Vorderfläche von P_1 reflectirt, welcher die Platte P durchsetzt hat und umgekehrt. Bei der in Fig. 6 gewählten Stellung der Platte, wo $L_{11}P_1$ kleiner als $L_{11}E$ und E der zweite Brennpunkt von L_1 ist, schneiden sich dann die von P_1 kommenden Strahlen in dem Punkte u_1 . Construiren wir zu diesem Schnittpunkte u_1 das Bild u , welches die Vorderfläche von P_1 entwirft, so muss auch hier laut Beobachtung u ein Punkt der Brennebene Eu von L_1 sein. Unsere Aufgabe ist, die Phasendifferenz der in u_1 sich schneidenden Strahlen zu berechnen, welche den bestimmten von uns bezeichneten Weg zurückgelegt haben. Da $du_1 = du$ und $cu_1 = cu$, so ist in u dieselbe Phasendifferenz als in u_1 , und werden wir der Bequemlichkeit halber wieder u als Schnittpunkt der Strahlen betrachten. Was dann für u bezüglich P_1E gilt, gilt für u_1 bezüglich P_1E_1 , wenn E_1 der Bildpunkt von E in Bezug auf die Vorderfläche von P_1 .

Die Berechnung der Phasendifferenz, die immer nach denselben Grundsätzen ausgeführt wird, ergibt für den Punkt u :

$$\Delta = \frac{d \sin 2q}{2 \sqrt{n^2 - \sin^2 q}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

wo die eingeführten Zeichen ganz dieselbe Bedeutung haben wie im früher betrachteten Falle, und über die $\frac{1}{2} \epsilon_1$ und ϵ_2 , welche aB und dB mit $L_1 B$ bilden, dieselben Annahmen gemacht sind, wie dort. Verlängern wir Bd und Ba , so schneiden diese Verlängerungen die durch E gelegte Brennebene in u und z , und auch hier gilt, wie leicht zu finden:

$$Eu = Lg \text{ und } Ez = Lh;$$

ferner ist:

$$[BL_{11}] = \frac{f^2}{2e} - f \text{ also: } [BE] = \frac{f^2}{2e} - f + f = \frac{f^2}{2e},$$

insofern: $L_{11} E = f$ sein soll. Drücken wir ϵ_1 und ϵ_2 durch e und f aus, so wird in u die Phasendifferenz:

$$\Delta = \frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (Eu + Ez)$$

$$\text{oder: } \Delta = \frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (Lg + Lh).$$

Damit haben wir das interessante Resultat erhalten, dass zwei bestimmte, parallel zur Axe der Linse L auf letztere auffallende Strahlen sich in ein und demselben Punkte u der Brennebene Euz von L_1 , und zwar mit ganz derselben Phasendifferenz treffen, gleichviel ob der Spiegel um die Strecke e vor oder hinter dem Brennpunkte F liegt.

Auch im jetzigen Falle ist der in Δ vorkommende Factor $Lg + Lh = 2Lg + gh$, wo gh als constant zu betrachten ist, der Abstand homolog zum Mittelstreifen gelegener Minima, sodass für den Abstand D zweier benachbarter dunkler Streifen gilt:

$$D = \frac{if^2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{2d.e. \sin 2\varphi},$$

wo alle rechts vorkommenden Größen ganz dieselben sind, wie im früheren Falle, und nur e von F nach L zu gerechnet werden muss, anstatt wie früher, von F nach L_1 zu. Die Resultate, welche wir gewonnen, sind somit folgende:

1) Die Mitte der Erscheinung liegt, wenn sie im durchgehenden Lichte betrachtet wird, auf derjenigen Seite der optischen Axe, von welcher das Licht auf die Platte auffällt.

2) Der Abstand der Minima ist proportional der Wellenlänge des Lichtes.

- 3) Die Streifen sind äquidistant.
- 4) Der Streifenabstand ist derselbe, wenn der Spiegel ebensoweit vor als hinter dem Brennpunkte der Linse steht.
- 5) Der Streifenabstand ist umgekehrt proportional der Entfernung e des Spiegels vom Brennpunkte der Linse, gleichviel, ob e positiv oder negativ ist; ferner
- 6) umgekehrt proportional der Dicke der Platte,
- 7) direct proportional dem Quadrate der Brennweite der benutzten Linse.
- 8) Der Streifenabstand ist ein Minimum für φ ca. 49° . — Es wird jetzt unsere Aufgabe sein, diese Gesetze einzeln experimentell zu prüfen. Wir gehen demnach über zum experimentellen Theil dieser Arbeit.

Experimenteller Theil.

Um deutlich zu erkennen, dass der Centralstreifen nicht auf der optischen Axe der Linse liegt, stellt man am besten den Versuch im durchgehenden Lichte dar, ganz wie Fig. 1 zeigt, und bringt das gespiegelte Fadenkreuz mit dem wirklichen zur genauen Coïcidenz; der Fadenkreuzschnittpunkt ist dann der Brennpunkt der Linse, und durch ihn geht die optische Axe derselben. Ist der Spiegel dann so gestellt, dass die Streifenbreite klein und der Streifen viele auftreten, so sieht man deutlich den Mittelstreifen auf der rechten Seite der optischen Axe, und zwischen letzterer und dem Mittelstreifen noch mehrere Minima liegen.

Alle anderen abgeleiteten Resultate betreffen die Relation des Streifenabstandes zu den verschiedenen vorkommenden veränderlichen Grössen. Wollen wir demnach diese Relationen experimentell nachweisen, so müssen wir in jedem einzelnen Falle im Stande sein, die Streifenabstände messen zu können.

Das von mir benutzte Princip zur Messung des Streifenabstandes ist ein äusserst einfaches und bequemes.

Seien α und β (Fig. 7) zwei leuchtende Punkte in der Brennebene der Linse λ , deren erster Hauptpunkt h ist. Wie bekannt, treten alle von β ausgehenden Strahlen unter einander und parallel der Richtung βh aus; die von α kommenden dagegen parallel zur Richtung αh . Die beiden von λ

fortgehenden parallelen Strahlencomplexe bilden also den $\not\prec\delta = \not\prec\alpha h\beta$ miteinander. Ist F der Brennpunkt der Linse, so gilt:

$$\alpha F = hF \cdot \operatorname{tg} \alpha hF, \quad \beta F = hF \cdot \operatorname{tg} \beta hF$$

und, wenn wir nur kleine Winkel zu betrachten haben, dürfen wir setzen:

$$\alpha F = hF \cdot \not\prec\alpha hF, \quad \beta F = hF \cdot \not\prec\beta hF,$$

sodass wird: $\alpha F + \beta F = hF(\not\prec\alpha hF + \not\prec\beta hF)$. Darin ist: $\alpha F + \beta F = \alpha\beta$; $\not\prec\alpha hF + \not\prec\beta hF = \not\prec\alpha\beta = \delta$ und ferner hF die Brennweite von λ , welche wir mit φ bezeichnen wollen. Kennen wir φ , und können wir den Winkel δ messen, so ist der Abstand $\alpha\beta$ gegeben durch die Gleichung:

$$\alpha\beta = \varphi \cdot \delta.$$

Den Winkel δ messen wir aber einfach dadurch, dass wir vor die Linse λ ein auf unendlich eingestelltes, und um eine verticale Axe drehbares Fernrohr bringen, und nacheinander das Bild von α und β mit dem im Focus befindlichen Fadenkreuzschnittpunkt coincidiren lassen. Der Drehungswinkel ist der gesuchte Winkel δ .

In unserem Falle brauchen wir die Berechnung der absoluten Grösse $\alpha\beta$ gemäss der oben abgeleiteten Gleichung nun gar nicht auszuführen. Denn da wir es nur mit Relationen verschiedener Abstände $\alpha\beta$ in verschiedenen Fällen zu thun haben, so hebt sich bei Bildung dieser Relationen der constante Factor φ stets fort. Die verschiedenen Grössen $\alpha\beta$ verhalten sich demnach wie die zugehörigen Winkel δ , gemessen mit ganz derselben Linse λ , woraus folgt, dass alle für den Streifenabstand geltenden Resultate auch für den zum Streifenabstand gehörenden $\not\prec\delta$ Gültigkeit haben müssen. Bedeuten α und β zwei homologe Minima, so werde der zugehörige $\not\prec\delta$ der „Distanzwinkel“ dieser Minima genannt. In den auf p. 533 und 534 zusammengestellten Gesetzen kann dann „Distanzwinkel“ an Stelle von „Streifenabstand“ gesetzt werden.

Zur Messung der Distanzwinkel der Streifen hat man sich demnach ganz derselben Methode zu bedienen, wie bei Beobachtung der Erscheinung im reflectirtem Lichte. Am

besten verfährt man so: Man stellt das Fernrohr eines Spectrometers mittelst des Gauss'schen Oculars möglichst genau auf unendlich ein; setzt vor das Objectiv auf das Spectrometertischchen die achromatische Linse λ von grosser Brennweite und verschiebt nun das ganze Spectrometer in Richtung der von der Platte zurückkommenden Strahlen, bis man die Interferenzstreifen im Fernrohre mit dessen Fadenkreuz zugleich deutlich sieht. Wie schon damals erörtert, stehen dann die Streifen in der Brennebene von λ , und sind somit die Distanzwinkel durch Einstellen und Drehen des Fernrohres leicht zu bestimmen. Ehe ich irgend welche Resultate der Messung mittheile, sei noch folgende Bemerkung betreffs derjenigen Lichtquelle gemacht, die am geeignetesten ist, genaue Resultate zu liefern.

Wie das zweite Gesetz aussagt, ist der Streifenabstand proportional der Wellenlänge. Spricht schon die Färbung der Streifen dafür, so kann man sich von der Richtigkeit dieses Resultates noch leicht dadurch überzeugen, dass man vor die weisse Lichtquelle verschiedenfarbige Gläser hält. Bei rothem Glase ist der Abstand fast doppelt so gross, denn bei blauviolett gefärbtem.

Während so die ersten Minima noch dunkel, und nach der Mitte zu roth, nach aussen hin bläulich gefärbt erscheinen, wechseln, weiter von der Mitte entfernt, schliesslich nur noch blaue mit rothen Streifen ab. Von der Mitte nach aussen gerechnet, liegen die Minima dann beim Uebergang von roth zu blau. Da diese Grenze sehr scharf gezeichnet, so gibt sie ein Mittel an die Hand, selbst bei grosser Streifenbreite noch genau auf die Minima einzustellen. Bei Anwendung monochromatischen Lichtes ist diese Einstellung ungleich ungenauer, da schon bei geringem Streifenabstande die Minima verwaschen und breit sind. In der That erhielt ich bei Benutzung natürlichen Lichtes bedeutend übereinstimmendere Werthe für δ , als bei Anwendung homogenen oder Natriumlichtes. Da ferner im ersteren Falle die Erscheinung glanzvoller und die Mitte jederzeit erkenntlich, so wurden alle Messungen an den gefärbten Streifen ausgeführt.

Das zur Beobachtung benutzte Spectrometer erlaubte die Winkel bis auf $10''$ genau abzulesen. Ein aus der Differenz zweier Ablesungen gefundener Distanzwinkel irgend zweier Minima wird daher im schlimmsten Falle mit einem Fehler von $20''$ behaftet sein. Um die Aequidistanz der Streifen nachzuweisen, wird man daher nicht den Abstand je zweier benachbarter Streifen messen und diese miteinander vergleichen, sondern besser so verfahren: die Abstände je zweier homologer Minima messen, durch die zugehörige Ordnungszahl dividiren (wobei das erste Minimum der erste Streifen, das darauf folgende Maximum der zweite Streifen, das zweite Minimum der dritte Streifen etc.) und einander gleichsetzen. Denn, wenn mit δ_n der Distanzwinkel der n ten homologen hellen oder dunklen Streifen bezeichnet wird, so sagt das Gesetz der Aequidistanz nichts anderes aus, als dass $\delta_1 = \delta_3/3 = \delta_5/5 = \text{etc.}$ sein muss. Man sieht ein, das $\delta n/n$ nur noch den n ten Theil des grösstmöglichen durch Ablesung entstehenden Fehlers enthält. Aus diesem Grunde wurde auch für die späteren Messungen nicht δ_1 , sondern stets $\delta_5/5$ dem Streifenabstande zu Grunde gelegt. In der folgenden Tabelle finden wir die für δ_1 , $\delta_3/3$ etc. bei rothem und weissem Lichte erhaltenen Werthe nebeneinander gestellt.

Tabelle I.

δ	rothes L	weisses L	δ	rothes L	weisses L
δ_1	4' 40''	4' 30''	$\delta_5/5$	4' 36''	4' 32''
$\delta_3/3$	4 40	4 30	$\delta_7/7$	4 33	4 30

Aehnliche bei verschiedenen Entfernungen des Spiegels gemachte Beobachtungen ergaben ebenso befriedigende Resultate. Wir gehen daher zur Prüfung des vierten Gesetzes über. Um alle die bei der Herleitung unserer Resultate gestellten Bedingungen möglichst genau zu erfüllen, auch wenn der Spiegel andere und andere Lagen im Raume einnimmt, wurde als Linse L eine in einem Fernrohr (r) (Fig. 8) festsitzende Objectivlinse benutzt und die Ocularlinse entfernt. Es war dann leicht, die optische Axe nahe in eine

Ebene mit derjenigen des Beobachtungsfernrohres zu bringen. Um den Spiegel (R) senkrecht zur optischen Axe von L oder was dasselbe, zur Axe des Rohres r [parallel] stellen und so parallel mit sich verschieben zu können, wurde er an das Auszugsrohr q des Rohres r geklebt. Nachdem mittelst der Gauss'schen Methode bewiesen, dass in der That der Spiegel senkrecht zur optischen Axe von L stand, und es beim Bewegen des Auszugsrohres auch blieb, wurde derselbe von letzterem wieder getrennt und auf einem selbständigen Stativ befestigt. Derselbe bestand aus einer Messingschiene m (Fig. 8), welche auf einem schweren eisernen Fusse festsass und längs ihrer Oberfläche eine Nuth hatte, in die eine entsprechend geformte Leiste des Metallstückes s passte. Letzteres sass glatt auf m auf und konnte leicht hin und her geschoben werden. An der dem Rohre q zugewendeten Fläche von s wurde der Spiegel R so befestigt, dass, wenn die Schiene m nahe die Richtung des Rohres r hatte, das Auszugsrohr q an allen Stellen seiner Peripherie mit dem Spiegel in Berührung stand. War dies der Fall, so stand der Spiegel senkrecht zur Axe von L und blieb es, wenn er längs der Schiene verschoben wurde. — Uebrigens hatte man eine Controle dafür, dass der Spiegel parallel zu sich bewegt werden konnte, indem dann die am Fadenkreuzschnittpunkt des Beobachtungsfernrohres befindliche Mitte der Erscheinung bei jeder Entfernung des Spiegels daselbst bleiben musste.

Der Beweis der Relation 4 und 5, erfordert eine Verschiebung des Spiegels vom Brennpunkt der Linse L nach derselben hin und von derselben fort. Bei der beschriebenen Anordnung des Versuchs ist nur letzteres möglich, insofern ja der Brennpunkt des Objectivs L des Rohres r immer am Ende von r liegt. Diesem Uebelstand kann aber sehr leicht abgeholfen werden dadurch, dass man vor L eine biconcave Linse l von grösserer Brennweite als L befestigt und beide mittelst Spiegelbilder centriert. Denn ist f die Brennweite von L und $-q$ diejenige von l , so wird F , die Brennweite des Systems ($L + l$), ausgedrückt durch die Gleichung:

$$F = \frac{qf}{q-f}.$$

Ist, wie festgesetzt worden, $[\varphi] > [f]$, so die Brennweite des Systems reell und, wie folgendes Zahlenbeispiel lehrt, grösser als die von L allein. Für $f = 30$ cm und $[\varphi] = 70$ cm z. B. wird: $F = 52,5$ cm. Freilich wird durch Vorsetzen der Linse l vor L ein Linsensystem entstehen, dessen Achromasie geringer, und dessen Aberration grösser als diejenige der Linse L allein ist; bedenken wir aber, dass nur unendlich nahe der optischen Axe des Linsensystems verlaufende Strahlen zur Erscheinung beitragen, so dürfen wir diese schädlichen Einflüsse von λ ganz ruhig ausser Acht lassen. Wir können jetzt also den Brennpunkt der in r befindlichen zusammengesetzten Linse ($L + l$) durch geeignete Wahl von l beliebig weit von r entfernen, und somit sind wir im Stande, den Spiegel durch den Brennpunkt hindurch der Linse bald zu nähern, bald von ihr weiter wegzurücken. Um die Verschiebung des Spiegels messen zu können, wurde an der Seitenfläche von m eine Scala befestigt, über welcher der über m hervorragende Spiegel hinglitt. Der Spiegel berührte mit seiner unteren Fläche fast die Oberfläche der Schiene m , sodass man beim Visiren längs der spiegelnden Fläche des Spiegels stets auf denselben Theilstrich einstellte. Ist ferner die über m gleitende Fläche des Spiegels eben und geschliffen, so spiegelt sich in dem über m hervorspringenden Theile derselben die Scala, und die Einstellung der unteren Kante des Spiegels auf einen Theilstrich ist eine äusserst genaue.

Die scheinbar grössste Schwierigkeit bei Prüfung der Gesetze 4 und 5 liegt in dem Auffinden des Brennpunktes unseres Linsensystems ($L + l$) im Raume d. h. unseres Nullpunktes der Scala, von welchem aus die $+e$ und $-e$ gemessen werden. Diese Schwierigkeit ist aber nur scheinbar; sie ist sofort gehoben, wenn wir an das von uns abgeleitete Gesetz denken, welches aussagt, dass gar keine Streifen auftreten, sobald der Spiegel im Brennpunkte der Linse steht. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, oder nur nahezu. Gibt es auch eine Spiegelstellung, wo die Streifen sehr weit voneinander entfernt sind, und ihr Abstand ein Maximum erreicht hat, so verschwinden sie doch selten gänzlich aus

dem Gesichtsfelde. Nur bei einer sehr guten Einstellung aller zum Versuch nöthigen Apparate, wie dies der Fall bei der Senkrechtstellung des Fernrohrs auf eine Prismenfläche, verschwinden die Streifen bei gewisser Stellung des Spiegels ganz aus dem Gesichtsfelde und kehren erst wieder, nachdem der Spiegel eine endliche Strecke zurückgelegt hat. Es ist wohl kaum nöthig, hervorzuheben, dass für unsere Einstellung gerade der Umstand von grosser Wichtigkeit ist, dass bei jeder Stellung Streifen auftreten. Infolge dessen war bei meinen zu Messungen benutzten Versuchen diejenige Spiegelstellung, bei welcher das Sehfeld fast gleichmässig hell, eine äusserst empfindliche und sichere. Denn bei der leisesten Verschiebung des Spiegels aus dieser Nullstellung trat ein Zusammengehen der ersten Minima ein, deren innere rothe Säume auch dann sichtbar blieben, wenn $e = 0$ war.

Es fragt sich somit nur noch, ob denn das zur Bestimmung des Brennpunktes benutzte Gesetz richtig ist. Dass das der Fall, werden wir später direct beweisen. Hier wollen wir vorläufig annehmen, es sei der Brennpunkt gegeben durch die Stellung des Spiegels, bei welcher der Streifenabstand ein Maximum ist, darnach den Nullpunkt der Scala bestimmen und die Distanzwinkel für verschieden grosse $+e$ und $-e$ messen. Finden wir die Gesetze 4 und 5 bestätigt, so ist dann zugleich bewiesen, dass der Nullpunkt richtig. In der folgenden Tabelle sind die für gleichgrosse Entfernung des Spiegels vor und hinter dem Brennpunkte gemessenen Distanzwinkel des Streifenabstandes, also die Distanzwinkel zweier benachbarter Streifen nebeneinander gestellt. Dabei ist für $e = 1$ cm aus Mangel der Minima höherer Ordnung δ_3 , für alle übrigen e 's aber δ_5 beobachtet und auf δ reducirt worden. Diese Werthe δ_5 unterscheiden sich bei verschiedenen Einstellungen des Spiegels auf denselben Scalenteil sowohl, als bei wiederholter Einstellung des Fadenkreuzes auf dieselben Minima kaum um mehr als $10''$ bis $20''$. Es sind übrigens die Mittelwerthe aus je vier Beobachtungen angegeben, die an einer Platte von der Dicke $d = 4,012$ mm und dem Brechungsexponenten $n = 1,53$ ausgeführt worden sind.

Tabelle II.

e	Distanzwinkel δ		Differenz
	w. Sp. vor dem Focus	w. Sp. hinter dem Focus	
1 cm	16° 25,0'	15° 52,0'	+ 33,0'
2 "	8 14,0	8 8,4	+ 5,6
3 "	5 28,0	5 28,0	—
4 "	4 3,5	4 5,5	— 2,0
5 "	3 17,5	3 14,0	+ 3,5
6 "	2 43,9	2 42,0	+ 1,9
7 "	2 20,6	2 18,5	+ 2,1
8 "	2 1,3	2 1,3	—

Die in der letzten Verticalreihe stehenden Differenzen sind ausserordentlich klein und sprechen somit für die Richtigkeit des Gesetzes 4, als auch dafür, dass der Nullpunkt genau bestimmt, und dass überhaupt die Methode der Messung und Einstellung befriedigend streng gewesen sein musste.

Die in der zweiten oder dritten Verticalreihe stehenden Distanzwinkel erlauben nun zugleich, das Gesetz 5 zu prüfen, nach welchem sich δ umgekehrt verhalten soll wie die Entfernung (+e) des Spiegels vom Brennpunkte. Bezeichnen wir mit δ_{+e} den Distanzwinkel der Streifenbreite bei einer Entfernung von e cm des Spiegels vor dem Focus, und entsprechend mit δ_{-e} diesen Winkel, wenn der Spiegel um ebensoviel hinter dem Focus steht, dann können wir unsere Proportion 5 auch so ausdrücken:

Es müssen $e \cdot \delta_{+e}$ und $e \cdot \delta_{-e}$ für alle Werthe von $e = 1, 2 \dots$ cm constant und gemäss Proportion 4, einander gleich sein. Die so gebildeten Producte aus den in Tabelle III angegebenen Werthen finden wir in folgender Tabelle in den beiden ersten Verticalreihen nebeneinander gestellt. Da bei grossen Werthen von e in dem Producte $e \cdot \delta_{\pm e}$, in dem der e mal so grosse Beobachtungsfehler von $\delta_{\pm e}$ steckt, sich letzterer bemerkbar machen muss, so verfahren wir, um die in 5 ausgedrückte Proportion zu beweisen, besser so. Wir reduciren mittelst derselben alle für die verschiedenen e 's beobachteten Winkel δ auf den für $e = 5$ cm gemessenen Winkel, d. h. wir bilden $1 \cdot \delta_{\pm 1}/5, 2 \cdot \delta_{\pm 2}/5, 3 \cdot \delta_{\pm 3}$ etc., welche Werthe alle einander gleich sein müssen, falls Gesetz 5 richtig, und zwar

gleich $(5 \cdot \delta_{\pm 5}/5) = \delta_{\pm 5}$. Wie leicht einzusehen, erhalten wir diese Werthe einfach dadurch, dass wir alle die schon gebildeten und in den beiden ersten Verticalreihen der nächsten Tabelle aufgeführten Producte: $e \cdot \delta_{\pm e}$ durch 5 dividiren. Wir finden diese Quotienten in derselben Tabelle unter $e \cdot \delta_{+e}/5$ und $e \cdot \delta_{-e}/5$ angegeben. In der letzten Horizontalreihe stehen die Mittelwerthe für den Distanzwinkel der Streifenbreite bei $e = 1$ cm und $e = 5$ cm, während die erste Verticalreihe die Grösse von e angibt.

Tabelle III.

e	$e \cdot \delta_{-e}$	$e \cdot \delta_{+e}$	$e \cdot \delta_{-e} : 5$	$e \cdot \delta_{+e} : 5$
1 cm	16' 25,0''	15' 52''	3' 17,0''	3' 10,4''
2 "	16 28,0	16 16,8	3 17,6	3 15,4
3 "	16 24,0	16 24,0	3 16,8	3 16,8
4 "	16 14,0	16 22,0	3 14,8	3 16,4
5 "	16 27,5	16 10,0	3 17,5	3 14,0
6 "	16 19,8	16 12,0	3 15,96	3 14,4
7 "	16 24,2	16 9,5	3 16,8	3 13,9
8 "	16 10,4	16 10,4	3 14,1	3 14,1
Mittel:	16' 21,61''	16' 12,1''	3' 16,32''	3' 14,40''

Darnach lässt die Uebereinstimmung zumal der auf $e = 5$ cm reduciren Distanzwinkel nichts zu wünschen übrig, sodass damit bewiesen, dass sich δ umgekehrt verhält wie die Entfernung e des Spiegels, gleichviel ob $e = +$ oder $-$ genommen wird. Gleichzeitig bestätigen die hingeschriebenen Mittelwerthe, die wir später noch brauchen werden, die Richtigkeit des vierten Gesetzes zum neuen in schönster Weise. Einestheils um diese wichtigen und interessanten Relationen 5 und 4 mehrfach zu prüfen, anderentheils um das Gesetz, betreffend die Abhängigkeit des Streifenabstandes von der Dicke der Platte zu bestätigen, wurden ganz dieselben Messungen noch mehrfach an anderen Platten ausgeführt. Es sei mir erlaubt, noch diejenigen mitzutheilen, welche an einer 4,48 mm dicken planparallelen Platte vom Brechungsexponenten $n = 1,53$ gemacht worden sind. Damit ausser der Dicke der Platte nicht auch φ geändert wurde, stellte ich vor der Vertauschung der Platte den Fadenkreuzschnittpunkt auf die Mitte des Centralstreifens ein und drehte

nach der Vertauschung die neue Platte so lange, bis die Einstellung des Fadenkreuzes dieselbe war wie vorher. Die dabei unterlaufenden Fehler können das Resultat nicht beeinflussen, da eine kleine Änderung von φ [zumal wenn φ ungefähr $40 - 50^\circ$ beträgt] die Grösse $\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} / \sin 2\varphi$ fast gar nicht ändert. In der folgenden Tabelle haben die Zeichen dieselbe Bedeutung wie früher. Die Differenzen der vierten Columnne beziehen sich auf die in einer Horizontalreihe stehenden Werthe der zweiten und dritten Verticalreihe. Um das Gesetz 5 nachzuweisen, sind wiederum die für verschiedene Entfernungen des Spiegels beobachteten Distanzwinkel auf diejenige von 5 cm reducirt. Die dazu gebildeten Quotienten $e \cdot \delta_{-e}/5$ und $e \cdot \delta_{+e}/5$ stehen in den beiden letzten Columnnen.

Tabelle IV.

e	Distanzwinkel δ		Differenz	$e \cdot \delta_{-e}/5$	$e \cdot \delta_{+e}/5$	
	w. Sp. vor	hint. d. Focus				
1	1 cm	15' 40"	15' 5"	+ 35"	3' 8,0"	3' 1,0"
2 "	7 32	7 23	+ 9	3 0,8	2 57,2	
3 "	4 54	4 53	+ 1	2 56,4	2 56,0	
4 "	3 41	3 41	0	2 56,8	2 56,8	
5 "	2 55	2 55	0	2 55,0	2 55,0	
6 "	2 24	2 25	- 1	2 52,8	2 54,0	
7 "	2 5	2 5	0	2 55,0	2 55,0	
8 "	— —	1 51	—	— —	2 57,6	
9 "	— —	1 35	—	— —	2 51,0	
10 "	— —	1 27	—	— —	2 54,0	
Mittel:	— —	— —	—	2' 55,76"	2' 57,88"	

Auch durch diese Beobachtungen sind die Gesetze 5 und 4 von Neuem bestätigt. Worauf es uns jetzt aber hauptsächlich ankommt, sind die in Tabelle III und IV berechneten Mittelwerthe für δ bei $e = \pm 5$ cm, mittelst deren wir die Relation 6 beweisen wollen. Dieselbe sagt aus, dass wenn δ' , resp. δ'' der Distanzwinkel der Streifenbreite bei einer Platte von der Dicke d' , resp. d'' mm bei sonst gleichen Verhältnissen ist, dann gelten muss:

$$\frac{d'}{d''} = \frac{\delta''}{\delta'}, \text{ woraus folgt: } d' = \frac{d'' \cdot \delta''}{\delta'};$$

Bei $e = + 5$ cm war für $d' = 4,0125$ mm, $\delta' = 3' 14,4"$ und für $d'' = 4,43$ mm, $\delta'' = 2' 55,76"$. Darnach wird:

$$d' = 4,43 \cdot \frac{2,9298}{3,24} = 4,0052 \text{ mm.}$$

Während für $e = -5 \text{ cm}$, wo $d' = 4,0125 \text{ mm}$, $\delta' = 3' 16,92''$ und $d'' = 4,43 \text{ mm}$, $\delta'' = 2' 57,83''$ waren, wird:

$$d' = 4,43 \cdot \frac{2,9638}{3,272} = 4,0127.$$

Der Fehler ist im ersten Falle $-0,0075$, im zweiten nur $+0,0002 \text{ mm}$.

Hätten wir aus den in Tab. IV stehenden Werthen die Mittelwerthe aller Producte $e \cdot \delta_{\pm}$, gebildet und mittelst dieser und der in Tab. III berechneten Werthe $e \cdot \delta_{\pm}$, dieselben Proportionen: $d' = (d'' \cdot \delta'' / \delta')$ ausgerechnet, würden wir bezüglich erhalten haben: $d' = 4,004$ und $d' = 4,018 \text{ mm}$, welche Werthe von dem beobachteten Werth $4,0125 \text{ mm}$ um $-0,0085$ und $+0,0055 \text{ mm}$ abweichen.

Beobachtungen behufs Nachweises der Abhängigkeit des Streifenabstandes vom Winkel φ , den die Plattennormale mit der Linsenaxe einschliesst, sind nicht gemacht worden, wohl aber Messungen bei Linsen von verschiedener Brennweite.

Wie man die Brennweite der im Rohre r festsitzenden Objectivlinse L variiert, ist früher erörtert worden. Die verschiedenen vor L nacheinander befestigten Concavlinsen (l) wollen wir mit l_1 , l_2 etc. bezeichnen, wobei die Brennweite von l_1 grösser als die von l_2 , die von l_2 grösser als die von l_3 etc. sein soll. Um nachzuweisen, dass der Streifenabstand proportional dem Quadrate der Brennweite der Linse ist, müssen wir vor allem die Brennweiten der Linsen L , $(L+l_1)$, $(L+l_2)$ etc. kennen.

Eine wenn auch nicht allzugenau Methode, die Brennweite einer Linse zu bestimmen, ist folgende.

Von einem beleuchteten verticalen Millimetermaassstab wird mittelst der Linse ein reelles, vergrössertes Bild auf einem weissen Schirm entworfen. Ist dann g , resp. G und a , resp. A die Grösse und der Abstand des Objectes, resp. des Bildes, so berechnet sich f , die Brennweite der Linse, aus den Gleichungen:

$$f = A \frac{g}{g + G} = a \frac{G}{g + G}.$$

Auf diese Weise wurde die Brennweite der Linsen L , $(L + l_1)$ etc. bei den verschiedensten Werthen von g , G , a und A gesucht. Bezeichnen wir mit f die von L , mit f_1 die von $(L + l_1)$, mit f_2 die von $(L + l_2)$ etc., so war $f = 264,46$ mm; $f_1 = 343,2$ mm; $f_2 = 382,4$ mm und $f_3 = 413,7$ mm. Der für f angegebene Werth, auf welchen es, wie wir sehen werden, bei der Prüfung des siebenten Gesetzes hauptsächlich mit ankommt, ist das Mittel aus acht Bestimmungen; die übrigen Werthe f_2 etc. das Mittel aus drei bis vier Beobachtungen.

Ungefähr dieselben Werthe von f , f_1 , f_2 etc. ergab folgende Methode, die nur deswegen erwähnt sei, weil sie direct zu bestätigen im Stande ist, dass der Spiegel im Brennpunkte der Linse steht, wenn die Streifenbreite ein Maximum.

Wie schon mehrfach erwähnt und benutzt, kann man durch ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr, vor dessen Objectiv eine zweite Linse angebracht ist, nur solche in der Brennebene dieser Linse befindliche Gegenstände wahrnehmen. Erzeugen wir also mit einer Linse L durch Verschieben des Spiegels die breitesten Streifen, beleuchten jetzt von der Seite her die der Linse zugewandte Fläche des Spiegels, bringen an Stelle der Platte P ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr, dessen Axe mit der der Linse zusammenfalle, so müssen wir durch das Fernrohr deutlich die beleuchtete Fläche des Spiegels mit ihren Ritzen und Schrammen sehen, falls der Spiegel in der Brennebene der Linse steht. In der That brauchte der Spiegel selten und höchstens um einen Millimeter verschoben werden, damit dies der Fall, wodurch direct nachgewiesen, was wir beweisen wollten.

Merkt man sich die Stellung des Spiegels, wo derselbe deutlich durch das Fernrohr gesehen wird, vertauscht Fernrohr und Spiegel, während die Linse ihren Ort beibehält, und verschiebt nun den Spiegel so lange, bis man ihn wieder deutlich durch das Fernrohr erblickt, so gibt uns die Hälfte der Entfernung, gemessen zwischen der bevorzugten Stellung des Spiegels auf der einen und anderen Seite der Linse, die Brennweite der letzteren.

Nachdem so die Brennweiten der einzelnen Linsensysteme (L), ($L + l$) etc. festgestellt, wurden für jedes einzelne ganz dieselben Messungen ausgeführt, wie die in Tabelle 3 und 4 mitgetheilten. Es ist dann gemäss Resultat 7, wenn bei bestimmter Stellung des Spiegels δ_f , resp. δ_{f_1} , der Distanzwinkel des Streifenabstandes bei der Linse mit der Brennweite f , resp. f_1 bedeutet:

$$f_1 = f \sqrt{\frac{\delta_{f_1}}{\delta_f}}$$

Wir können also die Brennweite f_1 so oft berechnen, als wir δ_f und δ_{f_1} bei verschiedener Entfernung e des Spiegels von der Linse gemessen haben. In der folgenden Tabelle sind die für die Linsen mit der Brennweite $f = 264,46$ mm und $f_1 = 343,2$ mm beobachteten Distanzwinkel in der zweiten und dritten Columnne nebeneinander gestellt, während die erste Verticalreihe angibt, bei welcher Entfernung e dieselben gemessen worden sind. Da bei Anwendung der Linse L ($f = 264,46$ mm) der Spiegel nur hinter dem Brennpunkt verschoben werden konnte, sind in allen folgenden Tabellen nur die für positive e gemessenen Distanzwinkel angegeben. Die aus den in einer horizontalen Reihe stehenden Werthen berechneten Brennweiten f_1 sind in der letzten Columnne enthalten. Sie müssen alle einander, und zwar gleich dem beobachteten Werthe $f_1 = 343,2$ mm sein, falls die Relation 7 richtig ist. Der Mittelwerth aus allen berechneten Werthen f_1 weicht in der That nur um 1,1 mm von dem beobachteten ab, wie folgende Tabelle lehrt.

Tabelle V.

e	δ_f	δ_{f_1}	$f_1 = f \sqrt{\frac{\delta_f}{\delta_{f_1}}}$
1 cm	6' 55,0"	11' 36,66"	342,65 mm
2 "	3 26,0	5 40,0	339,75 "
3 "	2 14,6	3 46,0	342,68 "
4 "	1 40,0	2 50,0	344,87 "
5 "	1 21,0	2 10,0	341,15 "
6 "	1 6,0	1 52,0	344,45 "
7 "	— 59,0	1 36,5	338,40 "
8 "	— 50,0	1 24,0	342,85 "
Mittel:	— —	— —	342,1 mm

Aus dieser Tabelle folgt, dass auch die bei verschiedenen e berechneten Werthe von f_1 dem Mittelwerth ziemlich nahe kommen. Wo dies nicht der Fall, wie bei $e = 7$ cm, kann man mit grosser Sicherheit schliessen, dass δ_f oder δ_{f_1} für dieses e schlecht beobachtet ist. Wirklich ist $\delta_f = 59''$ ungenau, wie man leicht erkennt, wenn man die zwischen e und δ bestehende Relation benutzt und $e \cdot \delta_e$ bildet. Demnach muss auch in der nächsten Tabelle der Fehler bei $e = 7$ cm wiederkehren, in welcher die Werthe f_2 angegeben sind, welche mittelst der Brennweite f und den für die Linsen L und $(L + l_2)$ gemessenen Distanzwinkeln δ_f und δ_{f_2} nach der Formel: $f_2 = f \sqrt{\delta_{f_2}/\delta_f}$ berechnet sind.

Tabelle VI.

e	δ_f	δ_{f_2}	$f_2 = f \sqrt{\frac{\delta_{f_2}}{\delta_f}}$
1 cm	6' 55,0''	14' —''	376,06 mm
2 "	3 26,0	7 14	383,87 "
3 "	2 14,6	4 40	381,43 "
4 "	1 40,0	3 31	384,20 "
5 "	1 21,0	2 50	383,10 "
6 "	1 6,0	2 20	385,14 "
7 "	— 59,0	2 —	377,80 "
Mittel:	— —	— —	381,66 mm

Auch hier weicht der berechnete Mittelwerth nur um 0,74 mm von dem beobachteten Werth $f_2 = 382,4$ mm ab, und stimmen die einzelnen Werthe f_2 ziemlich gut miteinander überein. Abgesehen von f_2 für $e = 1$ cm ist nur f_2 für $e = 7$ cm sehr ungenau, wie zu erwarten war, falls δ_f für $e = 7$ cm nicht zufällig auch fehlerhaft sein sollte. Dies ist nicht der Fall, und können sich somit die in δ_f und δ_{f_2} gemachten Fehler auch nicht aufheben.

Aehnlich gute Werthe für f_2 liefert auch die Gleichung:

$$f_2 = f_1 \sqrt{\frac{\delta_{f_2}}{\delta_{f_1}}}$$

sodass die Richtigkeit der Relation 7 zwischen dem Streifenabstande und der Brennweite der Linse ausser allen Zweifel gesetzt ist.

Dass alle mitgetheilten Messungen noch besser ausgefallen wären, wenn wir anstatt der combinirten Linsensysteme ($L + l_a$) Linsen von der entsprechenden Brennweite gehabt, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Immerhin sind bei der Schwierigkeit des Versuchs und der Messung die Beobachtungsresultate überraschend genau, woraus mit Recht geschlossen werden muss, dass alle von uns theoretisch unter mancherlei Annahmen und Vernachlässigungen abgeleiteten Gesetze der Wirklichkeit sehr nahe kommen müssen.

Berlin, Physikal. Institut, August 1884.

II. Ueber die Diathermansie von Aesculinlösungen; von Karl Wesendonck.

In der Einleitung zu seiner ausgedehnten Arbeit¹⁾ über die Fluorescenz von 36 verschiedenen Substanzen hebt Hr. Hagenbach die Nothwendigkeit solcher umfassender Untersuchungen für die Aufstellung einer erschöpfenden Theorie der Fluorescenz wohl mit Recht hervor. Er fand bekanntlich die enge Beziehung zwischen Absorption und Fluorescenz, welche bereits Stokes bemerkt, ebenso wie den nach diesem Physiker benannten Satz durchweg bestätigt. Hagenbach's Beobachtungen indessen, ebenso wie die anderen mir bekannt gewordenen Beobachtungen beziehen sich nur auf die direct sichtbaren und die ultravioletten Theile des Spectrums, das Ultraroth ist ganz ausser Acht gelassen worden. Nachdem es in neuerer Zeit gelungen, letzteres der Forschung bei weitem zugänglicher als bisher zu machen, lag es nahe, ähnliche Untersuchungen wie die eben genannten auch auf die Wärmestrahlen auszudehnen, und einen ersten, allerdings sehr bescheidenen Anfang hierzu möchte ich mir erlauben, in dem Vorliegenden in kürze mitzutheilen. Eine specielle Veranlassung hierzu boten theoretische Untersuchungen von Hrn. Lommel, denen gemäss in den ultraroten Theilen des Spectrums bei den sogenannten Körpern

1) Hagenbach, Pogg. Ann. 146. p. 65 u. f. 1872.

zweiter Classe, Aesculin, Curcuma, Chinin etc. starke Absorptionserscheinungen zu erwarten wären. Nach zahlreichen fremden wie eigenen Beobachtungen theilt nämlich der genannte Physiker die fluorescirenden Substanzen in zwei Classen ein, von denen die der ersten angehörigen, welche starke Absorptionsstreifen im sichtbaren Theile des Spectrums zeigen, dem Stokes'schen Gesetze nicht durchweg folgen, während die Körper der zweiten Classe dies thun, aber dabei nur mehr oder minder verschwommene Absorptionserscheinungen in den sichtbaren Theilen des Spectrums aufweisen. Mechanische Betrachtungen führten Hrn. Lommel¹⁾ zu der Annahme, dass die Fluorescenz der Substanzen erster Classe, akustischen Verhältnissen entsprechend, als eine solche durch Resonanz, die der Körper zweiter Classe dagegen als eine solche durch Differenztöne aufzufassen sei. Seinen Ausführungen gemäss hat man nämlich anzunehmen, ein Molecul werde nicht nur, wie der Kirchhoff'sche Satz es verlangt, durch Schwingungen, die den ihm eigenthümlichen nahe liegen, resp. gleich sind (sogenannte directe Absorption), zum Vibriren gebracht, sondern ebenso durch solche, welche je eine Octave höher oder tiefer gelegen sind (sogenannte indirekte Absorption), dabei soll es aber, gleichgültig ob direct oder indirect erregt, alle diejenigen Vibrationen aussenden, deren es überhaupt fähig ist. Nach Lommel's²⁾ früheren Ausführungen sollten die direct absorbierten violetten Lichtstrahlen nicht nur wieder ebensolche, sondern auch gewisse ultrarote in den Molekülen der Körper zweiter Classe hervorrufen, und als Differenzton dieser beiden Undulationsarten sollte das Fluorescenzlicht aufzufassen sein. Nimmt man bei dem Aesculin z. B., dessen Erscheinungen sich einigermassen durch Einfachheit auszeichnen, an, ausser dem Lichtarten mit den Schwingungszahlen 725—1100, würden auch die der Fraunhofer'schen Linie *A* nahe liegenden mit den Schwingungszahlen 370—400 erregt, so ergäbe sich das Fluorescenzlicht mit den Schwingungszahlen 325—730 in der That als Differenztöne jener ersten Lichtarten. Späterhin schreibt

1) Lommel, Pogg. Ann. 143. p. 49 u. f. 1871.

2) Lommel, Pogg. Ann. 143. p. 38 u. f. 1871.

Lommel¹⁾ den Körpern zweiter Classe überhaupt nur noch indirekte Absorption in den sichtbaren Theilen des Spectrums zu; zur Erklärung der Fluorescenz nimmt er dann an, die violetten absorbierten Strahlen q erregten in dem Moleküle zwei ultrarote Lichtarten mit den Schwingungszahlen r_1 und r_2 , ersteres in der tieferen Octave von q gelegen, woraus dann nach Lommel's Theorie das Auftreten der Undulationen $q - r_1$ und $q - r_2$ folgt, die, falls sie dem sichtbaren Gebiete angehören, als Fluorescenzlicht wahrgenommen werden. Für das Aesculin hätte man also auch hiernach in der Gegend der Linie A eine kräftige Absorptionserscheinung zu erwarten. Ohne im mindesten von vorn herein der Lommel'schen Theorie das Wort reden zu wollen, schien es mir schon in Anbetracht des so auffallenden Fehlens entschiedener Absorptionsstreifen bei den Substanzen zweiter Classe von Interesse, nachzusehen, ob sich solche nicht vielleicht im ultraroten Gebiete finden würden. Das Resultat, welches ich bis jetzt erhalten, ist, wie ich gleich bemerken will, ein durchaus negatives. Verwandt wurde die Becquerel'sche Methode, welche mit Hülfe geeigneter phosphorescirender Körper sogenannte Phosphorographien des Ultraroth zu gewinnen gestattet. Die betreffenden Leuchtkörper waren von Hrn. Schuchardt in Görlitz bezogen und fein pulverisiert in möglichst gleichmässiger Vertheilung zwischen zwei dünne Glasplatten gebracht worden, ähnlich wie dies bereits H. Becquerel²⁾ und Lommel³⁾ gethan, um so einen phosphorescirenden Schirm zum Auffangen des Spectrums herzustellen. Es gelang mir bald, die wesentlichen von Becquerel und Lommel beschriebenen Erscheinungen zu erhalten. Der rothe und ultrarote Theil des Spectrums bildete sich, und zwar besonders schön bei einer grünblau phosphorescirenden Substanz, zunächst hell und für ausgeruhete Augen deutlich sichtbar auf dem matt leuchtenden Hintergrunde ab; dann, der Einwirkung des Spectrums entzogen, verschwand das helle

1) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 276. 1878.

2) H. Becquerel, Compt. rend. 96. p. 1215 u. f. p. 1853 u. f. 1883. Beibl. 3. p. 699 u. flgde.

3) Lommel, Wied. Ann. 20. p. 355. 1883.

Bild, um besonders nach längerer Exposition einem intensiv schwarzen Platz zu machen, in dem sich indessen ein halber Streifen zeigte. Es ist dieser der Stelle α Becquerel's entsprechend, die anliegenden dunkeln Theile sind die Banden W_1 und W_2 , welche bei nicht allzu kurzer Exposition auch schon im hellen Bilde sich als Banden abheben. Um die oben erwähnten Erscheinungen schön ausgebildet zu erhalten, musste ein möglichst wirksames Spectrum verwendet werden, welches eine genügend grosse Dispersion gestattete. Die einfache Methode mit Spalt, Linse und Prismen lieferte schon ganz gute Resultate, wenn der Spalt nicht zu eng, und die Ausbreitung des Spectrums nicht zu gross gewählt wurde. Es zeigte sich schon hierbei, dass eine auffallende Veränderung des Spectrums durchaus nicht eintrat, wenn man in den Weg der Lichtstrahlen ein mit concentrirter Aesculinlösung gefülltes, einen Centimeter breites Absorptionsgefäß stellte. In dem dunkeln wie in dem hellen Bilde blieb selbst die Vertheilung der Lichtstärke dieselbe, ob man mit oder ohne Absorptionsgefäß experimentirte, ob dieses mit Wasser oder Alkohol oder Aesculinlösung in einer diesen ähnlichen Flüssigkeit gefüllt war. Das Einschalten des Gefäßes hatte selbstverständlich eine Schwächung der Wirkung zur Folge, aber es machte sich dabei durchaus nichts dem Aesculin speciell Charakteristisches bemerkbar, ebensowenig ein specieller Einfluss des Lösungsmittels, während dagegen die Aufsaugung der violetten Strahlen sehr gut wahrnehmbar war. Das Resultat blieb ganz dasselbe, als ich die vom Heliostat kommenden Strahlen auf einen Spalt concentrirte und nunmehr mittelst Linse und passend gestellter Prismen ein Spectrum entwarf, das sich als sehr wirksam erwies. Das dunkle mittelst derselben erhaltene Bild war auffallend intensiv und dauerte über eine halbe Stunde fast unverändert an, sodass die Vergleichung verschiedener Abbilder sehr erleichtert wurde. Indessen auch hier blieb es bei dem früheren Resultate, ebenso bei Versuchen, die ich auf die letztgenannte Weise mit electrischem Licht anstelle. Dass die von mir verwendeten phosphorescirenden Platten in der That geeignet sind, einigermassen

starke Lücken im Spectrum ausfindig zu machen, davon überzeugte ich mich direct, indem es vollkommen gelang, den Schatten von Gegenständen wie Drähten, Papierstreichen u. dergl. sehr schön, sowohl hell auf dunklem, wie dunkel auf hellem Grunde abgebildet zu erhalten. Die Phosphorographien leiden an dem Uebelstande, dass ihr eigenes Licht die nicht erregten Stellen beleuchtet, indessen kann dies bei einigermassen starken Absorptionsstreifen, wie man sieht, nicht in Betracht kommen. Um der bei Prismen stets relativ sehr geringen Ausdehnung des ultraroten Theiles abzuhelpfen, verwandte ich zunächst ein Rutherford'sches Reflexionsgitter. Das von dem versilberten Heliostatenspiegel kommende Strahlenbündel wurde von einem ebenfalls versilberten Hohlspiegel mit etwa 200 mm Brennweite auf einen Spalt concentrirt, von dem ein zweiter eben solcher Hohlspiegel ein Bild entwarf. In das so erzeugte Strahlenbündel setzte man nun das Gitter auf die Weise, dass seine Apertur möglichst ausgefüllt wurde. In geeigneter Entfernung erhielt man nunmehr ein sehr schönes Diffractionsspectrum erster Ordnung, dessen Grösse und Helligkeit man innerhalb weiter Grenzen verändern konnte. Es wurden so ausgedehnte und deutlich sichtbare Phosphorographien gewonnen, welche sicher irgendwie erhebliche Absorptionsbanden hätten entdecken lassen müssen. Es blieb aber durchaus bei dem früheren Ergebnisse. Leider ist die Intensität eines solchen Beugungsspectrums keine sehr erhebliche, bei electricchem Lichte versagte es sogar. Trotzdem markirte sich, wenn man das Absorptionsgefäß so zwischen Platte und Gitter stellte, dass nur ein Theil der wirksamen Strahlen dasselbe passirte, die Schwächung dieser letzteren sehr deutlich in dem Abbilde. Da jedoch das Reflexionsgitter mir keine befriedigende Abbildung der *A*-Linie lieferte, und ein geeignetes durchgehendes Gitter mir nicht zur Verfügung stand, so stellte ich schliesslich noch Versuche mit einem Rowland'schen Reflexionsgitter an, die sehr befriedigend ausfielen. Die Anordnung, welche für dasselbe zum Zwecke optischer Untersuchungen getroffen war, konnte allerdings wegen zu grosser Ausdehnung des Spectrums nicht verwendet

werden. Ich liess daher die durch den schon erwähnten Hohlspiegel auf einen Spalt concentrirten Strahlen des Heliosstaten durch den zweiten Reflector nahezu parallel auf das Gitter werfen und erhielt so in der Entfernung von $1\frac{1}{2}$ —2 m ein prachtvolles, sehr wirksames Spectrum, dessen helle Abbildung sehr schön *BaA* als dunkle Streifen enthielt, die auch in dem umgekehrten Bilde, wenn auch weniger deutlich, zu erkennen waren. Besonders brauchbar war das nach kurzer Exposition erhaltene helle Bild, das sich in der Umgebung der Linie *A* besonders deutlich gestaltete. Aber auch jetzt noch zeigte sich bei Einschaltung der Aesculinlösung keinerlei charakteristische Aufsaugung der ultraröthen Strahlen, kein Absorptionsstreif. Eine Schicht von 3 und selbst 10 cm Dicke, an Stelle des früheren Absorptionsgefäßes eingeschaltet, übte keine weitere Wirkung aus. Bedenkt man, wie sehr schon 1 cm Wasser sich nach Becquerel¹⁾ durch Absorption bemerkbar macht, allerdings in Gegenden bedeutend geringerer Brechbarkeit, so muss man wohl zugeben, dass bei meinen Beobachtungen etwas Ähnliches bis zur Wellenlänge 900 hin nicht eingetreten. Und doch hätte man nach Lommel's Theorie und der Analogie der Körper erster Classe einen sehr entschiedenen Einfluss erwarten müssen. Hängt, wie die Theorie zeigt, der Combinationston in seiner Intensität von der Energie beider ihn erregenden Einzelschwingungen ab, so muss doch wohl zu einer starken indirekten Erregung ultraröther Schwingungen eine sehr entschiedene directe Absorption angenommen werden. Die Ungunst der Witterung, welche mir leider relativ nur sehr wenige Beobachtungen gestattete, hinderte mich, auch die Gebiete grösserer Wellenlängen in Betracht zu ziehen, hoffentlich wird es aber bei späteren Beobachtungen gelingen, diese Lücke auszufüllen, und auch noch andere Substanzen als das Aesculin zu untersuchen.

Physikal. Inst. d. Univ. Berlin, den 7. August 1884.

1) H. Becquerel, Compt. rend. 96. p. 1216. 1883. Beibl. p. 699.

III. Ueber die Theorie der Dispersion und Absorption, speciell über die optischen Eigenschaften des festen Fuchsins; von W. Voigt.

(Aus den Nachr. der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1884 Nr. 7 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser).

In zwei früheren Abhandlungen¹⁾ habe ich die allgemeinsten Gesetze derjenigen beiden Gattungen von Kräften aufgesucht, welche, auf den Lichtäther wirkend, die Energie aller in ihm fortgepflanzten Bewegungen entweder ungestört lassen oder vermindern. Nimmt man an, was die Beobachtungen wahrscheinlich machen, dass eine Vermehrung der Energie einer fortgepflanzten Bewegung durch die Wirkung eines ponderablen Körpers unmöglich ist, so sind die erwähnten Kraftgesetze die allgemeinsten in der Optik möglichen, und eine Erweiterung in dieser Hinsicht erscheint zunächst nicht denkbar.

Wenn nun aber trotzdem die von mir auf jene Kräfte basirte Lichttheorie bei weitem nicht alle beobachteten Erscheinungen darzustellen gestattet, z. B. zwar Dispersion und Absorption ergibt, aber nicht jedes beliebig complicirte Gesetz für deren Zusammenhang mit der Farbe liefert (was übrigens noch keine Theorie in der ganzen Allgemeinheit geleistet hat), so wird man naturgemäss zunächst die Hülfsannahmen der Theorie darauf hin prüfen, ob sie eine allgemeinere Fassung gestatten.

Da bietet sich aber ganz allein die Annahme verschwindend kleiner Amplituden der ponderablen Theile, welche bekanntlich anderen Theorien fremd ist. Indessen scheint es mir nicht zulässig, dieselbe fallen zu lassen. Ausser der mehrfach erörterten Schwierigkeit, dass man dann, solange man nicht den gesicherten Boden der Elasticitätsgleichungen verlässt, nothwendig stets neben einer Lichtwelle eine Art Schallwelle erhält, — die bei merklichen Amplituden auch eine beträchtliche lebendige Kraft erhalten muss, aber in

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 873. 1883. Göt. Nachr. 1884. Nr. 6. p. 137, letzteres auch Wied. Ann. 23. p. 104. 1884.

ihrer Wirkung noch nicht bemerkt ist, — liegt noch eine andere vor, die bisher zu besprechen weniger Veranlassung war.

Auch diejenigen Theorien, welche merkliche Amplituden der Körpertheilchen voraussetzen, aber, um jene „Schallwellen“ zu vermeiden, statt der gewöhnlichen elastischen Kräfte willkürliche zwischen den ponderablen Massen wirksam annehmen, ergeben für die ponderablen Theile Bewegungen, welche, ähnlich wie jene Schallwellen, nur solange andauern, als eine Lichtwelle den Körper passirt (d. h. jedenfalls nicht die die Absorption begleitende Wärmebewegung). Während also ein Bruchtheil der Energie, welche die in einem Zeitmoment im Körper enthaltene Lichtbewegung besitzt, indem er den Körpertheilchen mitgetheilt wird, genügt, um denselben eine merkliche Bewegung zu ertheilen, die ihrerseits auf die Bewegung des Aethers zurückwirkt, ist der in einem absorbirenden Körper stattfindende Energieverlust, der als Energiezuwachs den ponderablen Theilchen zu Gute kommt und der bei hinlänglicher Dauer des Vorganges beliebig gross werden kann, ohne jede Wirkung.

Der bedenkliche Widerspruch, der hierin liegt, tritt am auffälligsten hervor, wenn man ein Zahlenbeispiel betrachtet.

In dem absorbirenden Medium falle senkrecht auf eine Schicht von der Dicke 1 cm eine Lichtwelle, deren gesammte Energie pro Volumeneinheit gleich E sei. Die Bewegung der ponderablen Theile enthält darnach eine kinetische Energie, die pro Volumeneinheit kleiner als E , etwa gleich $\alpha \cdot E$ ist, wo $\alpha < 1$. Beim Durchgang durch die Schicht bleibe der Bruchtheil $\beta \cdot E$ in derselben zurück. Da nun die Zeit des Durchgangs durch die Schicht von der Dicke Eins gleich $1/\omega$ ist, wenn ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (in Centimetern gegeben) bezeichnet, so gewinnt die Schicht von der Dicke Eins pro Volumeneinheit in jeder Secunde den Energiezuwachs:

$\omega \cdot \beta \cdot E$, der ihr auch nicht verloren geht, solange man von der allmählichen und sehr geringen Wärmeableitung absieht. Nimmt man ein recht durchsichtiges Medium, das auf 1 cm Länge nur $1/1000$ der Energie absorbiert, so erhält man das Resultat,

dass der Zuwachs der inneren Energie durch Absorption pro Secunde und Volumeneinheit jedenfalls mehr als 30 000 000-mal grösser ist, als der Betrag, der in einem Moment infolge der eben durchgehenden Lichtwelle in Gestalt von lebendiger Kraft der ponderablen Theile in der Volumeneinheit vorhanden ist. Und dieser enorme Betrag, der bei stärker absorbirenden Körpern und in längerer Zeitdauer noch ganz ungeheuer wächst, soll ohne Einfluss auf die Lichtbewegung sein, während ein dagegen verschwindend kleiner die bedeutendsten Wirkungen gibt?

Ich glaube vielmehr, dass die vorstehende Betrachtung zu folgendem Schluss berechtigt: Da die Beobachtung in den meisten absorbirenden Medien keine merklichen Wirkungen der im Laufe ziemlich langer Zeit beim Hindurchgehen einer Lichtwelle zurückgehaltenen Energie auf die optischen Erscheinungen gibt, so ist es im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass in ihnen die so ausserordentlich viel kleinere Menge kinetischer Energie, welche in einem Zeitmoment durch die Lichtbewegung selbst in den Körpermolekülen vorhanden ist, irgend eine merkliche Rückwirkung auf die Aetherbewegung üben sollte; wir sind vielmehr gezwungen, in allen jenen Medien die Amplituden der Körperteile verschwindend klein anzunehmen.¹⁾

Durch diese Betrachtungen gewinnt es den Anschein, dass die Annahme, „die Materie sei bei der Lichtbewegung als ruhend anzusehen“, nicht nur, wie ich früher glaubte²⁾, als ein Nothbehelf einzuführen ist, der zu verwerfen sein wird, wenn wir einmal Mittel gewonnen haben werden, die Wärmebewegung zu behandeln, sondern im Wesen der Sache, also vermutlich in der gegenüber derjenigen des Aethers ausserordentlich grossen Dichtigkeit der ponderablen Materie tief begründet ist.

Da also ein Aufgeben der Annahme ruhender Körpermoleküle nicht zulässig ist, so werde ich ausschliesslich zu untersuchen haben, in welchem Sinne die bisher, wie ich

1) Auszunehmen wären nach dem obigen vermutlich die phosphorescirenden Körper.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 873. 1883.

glaube, auf streng mechanischer Grundlage entwickelte Lichttheorie sich unter Beibehaltung dieser Annahme erweitern lässt.

Die Wechselwirkung zwischen Materie und Aether ist ein Vorgang, der wahrscheinlich zum Theil im Inneren, zum Theil an der Oberfläche der ponderablen Moleküle in Gestalt von Stoss und Reibung vor sich geht, zum Theil auf Fernwirkung beruht. Die mathematischen Ausdrücke, welche ich dafür aus dem Princip der Energie geschlossen habe, beziehen sich nur auf das Gesamtresultat dieses höchst complicirten Processe: d. h. sein Erfolg kann als eine auf den Aether eines Volumenelementes gleichmässig ausgeübte Kraft angesehen werden, welche nothwendig einem der abgeleiteten Gesetze folgen muss. Jene Gesetze enthalten willkürliche Coefficienten, die bisher vorläufig (wie ausdrücklich bemerkt) als unabhängig von der Farbe angenommen sind. Wenn sich nun aber durch Beseitigung dieser speciellen Annahme weitere Beobachtungsgebiete in Uebereinstimmung mit der Theorie bringen lassen, so sehe ich nicht, welche Schwierigkeit sich dem entgegenstellen sollte.

Denn derselbe Schritt ist in mehreren Gebieten der Physik ganz ebenso bereits unbeanstandet gethan worden.¹⁾ Die innere Leitungsfähigkeit der Körper für die Wärme ist sogar als eine unbekannte Function der Temperatur in die Differentialgleichungen eingeführt worden, obgleich die Temperatur die abhängige Variable ist, während hier nur ein Parameter der Schwingungsbewegung in der Constante auftreten soll. Ueberdies sind ja in der Optik Erscheinungen bekannt, bei welchen Vorgänge im Inneren eines Körpers eine Wirkung nach aussen üben, welche von der Farbe abhängig ist, — warum soll der Vorgang im Inneren eines Moleküles nicht ähnlich zu denken sein?

Bietet sich hiernach also keine principielle Schwierigkeit für die Annahme, dass die Constanten der in einem ponderablen Volumen ablaufenden Prozesse abhängig von der

1) In der Optik in ganz ähnlichem Sinne wie oben z. B. von Mac Cullagh, Phil. Mag. (3) 21. p. 293. 1843. Pogg. Ann. 58. p. 268 bes. 273. 1843.

rabeln Körper auf den Aether wirkenden Kräfte mit der Farbe variiren, so hat dieselbe doch einige Uebelstände zur Folge, welche nachdrücklich an die Spitze gestellt werden sollen.¹⁾

Erstens führt sie von Differentialgleichungen, welche für alle Bewegungen gelten, auf solche, die nur für periodische Bewegungen einen Sinn haben. Für nicht periodische Bewegungen müsste die ursprüngliche Form mit constanten Coëfficienten gewählt werden. Für eine solche Verschiedenheit des Verhaltens periodischer und nicht periodischer Bewegungen könnte man die optischen Erscheinungen an dünnen Blättchen als Analogie anführen.

Zweitens enthält sie naturgemäß das Aufgeben einer befriedigenden Begründung eines allgemeinen Gesetzes für die Abhängigkeit der Dispersion und Absorption von der Farbe. Denn nur für solche Körper, für welche man aus irgend welchen Gründen, z. B. weil sie einatomige Moleküle enthalten, annehmen möchte, dass die von ihnen auf den Aether ausgeübten Kräfte von der Schwingungsdauer unabhängig sind, würden sich die früher abgeleiteten bezüglichen Gesetze der Dispersion und Absorption als nothwendig ergeben.

Diese Consequenz wird vermutlich Physiker, welche gerade die Aufsuchung des wahren Dispersions- und Absorptionsgesetzes mit besonderer Vorliebe betreiben, gegen die besprochene Erweiterung und vielleicht gegen meine ganze Theorie einnehmen. Ich halte es aber für ungleich wichtiger, eine mechanisch sichere Grundlage zu besitzen, welche für eine Gruppe von Erscheinungen die allgemeinsten Gesetze unbestimmt lässt, als eine mechanisch nicht haltbare, welche von jenen Erscheinungen immerhin nur einen kleinen Theil

1) Es ist wohl kaum nöthig, ausdrücklich hervorzuheben, dass sämtliche Gesetze, welche ich für die verschiedensten Medien aus meiner Theorie abgeleitet habe, auch bei Einführung der besprochenen Erweiterung unverändert bleiben, und man nur die unbekannten Constanten darin als Functionen der Schwingungsdauer zulassen hat. Dass die Grundlagen der Theorie unverändert bleiben, und es sich nur darum handelt, unnöthig beschränkende Nebenannahmen fallen zu lassen, ist schon im Eingang dieser Zeilen erörtert.

zu behandeln gestattet; denn die vorliegende Aufgabe in solcher Allgemeinheit anzugreifen, dass daran zu denken wäre, auf diesem Wege Absorptionsspectra von der Complication derjenigen der Metalldämpfe abzuleiten, hat noch keine Theorie vermocht.

Ich meine auch, die vielfach ausgesprochene Ansicht, dass bei den Vorgängen der Absorption und Dispersion intermolekulare Vorgänge mitspielen, müsste zusammen mit der Erkenntniss, dass die intermolekularen Bewegungen uns noch vollständig verschlossen sind, mit einer gewissen Nothwendigkeit zu der Folgerung drängen, dass demnach die vollständige Erklärung jener Erscheinungen noch unmöglich, und der einzige Weg, die theoretische Optik zu erweitern, der oben vorgeschlagene ist: die mechanisch begründeten Gesetze der wirkenden Kräfte als unbekannte Functionen der Schwingungsdauer zuzulassen.

Damit hätte die Untersuchung der Abhängigkeit der Dispersion und Absorption von der Farbe in unserer Theorie jetzt nur noch das Ziel, jene unbekannten Functionen zu bestimmen und die Fälle zu constatiren, in welchen sie sich als Constanten ergeben. Das grössere theoretische Interesse würde aber die Verknüpfung der verschiedenen derselben Farbe in einem im allgemeinen anisotropen, absorbirenden Medium entsprechenden Erscheinungen wecken.

In der letzteren Hinsicht versucht die folgende Abhandlung einen Beitrag zur Erforschung des optischen Verhaltens gewisser Körper zu bringen.

Von Körpern mit Eigenfarben kommt bisher für eine Vergleichung ihrer optischen Eigenschaften mit der Theorie nur das feste Fuchsin in Betracht, insofern nur für dieses Beobachtungen in verschiedener Richtung hin angestellt sind. E. Wiedemann¹⁾, P. Glan²⁾, E. Schenk³⁾ und J. Merkel⁴⁾ haben die elliptische Polarisation des in Luft reflec-

1) E. Wiedemann, *Pogg. Ann.* **151**. p. 1. 1874.

2) P. Glan, *Wied. Ann.* **7**. p. 321. 1879.

3) E. Schenk, *Wied. Ann.* **15**. 177. 1882.

4) J. Merkel, *Wied. Ann.* **19**. p. 1. 1883.

tirten Lichtes untersucht, W. Wernicke hat die Änderung der Absorption mit der Farbe und dem Einfallswinkel¹⁾ (leider nicht diese selbst in absoluten Zahlen) und die absolute Phasenänderung des reflectirten Lichtes²⁾ bestimmt. Ausserdem liegen Beobachtungen von G. Lundquist³⁾ über elliptische Polarisation und Intensität des in Crownglas an Fuchsia reflectirten Lichtes vor.

Die Vergleichung der Resultate der vier ersten Physiker zeigt leider grosse Widersprüche.

Hr. E. Wiedemann findet für zwei Fuchsinspiegel die Werthe des Haupteneinfallswinkels φ (in der Bezeichnung der früheren Arbeit) und des Amplitudenverhältnisses ρ der wiederhergestellten linearen Polarisation bei dem Haupteneinfallswinkel und dem Azimuth 45° die folgenden Werthe für gewisse Fraunhofer'sche Linien:

	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i> $\frac{1}{2}$ <i>b</i>	<i>F</i>	<i>F</i> $\frac{1}{2}$ <i>G</i>
I	$\frac{\varphi}{\rho}$ 66° 3'	64° 45'	59° 48'	58° 0'	50° 23'
	0,084	0,225	0,340	0,320	0,065 4'
II	$\frac{\varphi}{\rho}$ 64° 52'	64° 22'	58° 51'	52° 14' < 49° 5'	
	0,114	0,250	0,350	0,315	< 0,076

welche miteinander recht befriedigend stimmen. Hr. Glan hingegen theilt für verschiedene Wellenlängen, denen die beigeschriebenen Fraunhofer'schen Linien ungefähr entsprechen, mit:

<i>l</i>	657,2	589	530,6	469,8
	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i> $\frac{1}{2}$ <i>G</i>
$\frac{\varphi}{\rho}$	68° 32'	68° 31'	66° 44'	60° 36'
ρ	0,203	0,188	0,315	0,589

In dieser Zusammenstellung fällt ganz besonders der abweichende Verlauf der Werthe ρ gegenüber den Wiedemann'schen auf. Während in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Annahme, dass die grössere oder geringere Durchsichtigkeit ρ kleiner oder grösser macht (bei vollständiger Durchsichtigkeit zu Null), bei Wiedemann den rothen

1) W. Wernicke, Pogg. Ann. 155. p. 87. 1875.

2) W. Wernicke, Pogg. Ann. 159. p. 198. 1876.

3) G. Lundquist, Pogg. Ann. 152. p. 571. 1874.

4) Vgl. unten p. 569.

und violetten Strahlen, für welche Fuchsin ziemlich durchsichtig ist, die kleinsten ϱ entsprechen, ist es bei Glan fast umgekehrt.

Zwischen beiden Angaben halten sich die Resultate Hrn. Schenk's etwa in der Mitte:

	C	D	E	F	$F \frac{1}{2} G$	G
$\bar{\varrho}$	67° 1'	66° 53'	62° 45'	56° 39'	45° 7'	53° 26'
ϱ	0,073	0,261	0,394	0,496	0,492	0,265;

aber sie bringen andere Schwierigkeiten. Es soll nämlich für das äusserste Violet (G) die gegenseitige Verzögerung der beiden Componenten parallel und normal zur Einfalls-ebene die entgegengesetzte sein, als für alle anderen Farben, und soll eine Farbe zwischen F und G überhaupt gar nicht reflectirt werden. Wie weit die Unterschiede der Resultate von der verschiedenen chemischen Zusammensetzung der Fuchsinpräparate herrühren, kann ich natürlich nicht entscheiden; jedenfalls liegt da eine ziemliche Unsicherheit vor, denn Hr. Glan bezeichnet „reines salzaures Rosanilin“, Hr. Lundquist „ein Gemisch von essig- und arsenigsaurem Rosanilin“ als Fuchsin. Auch scheinen mit der Zeit Veränderungen in den Präparaten vor sich zu gehen, theils infolge allmählichen Austrocknens, theils chemischer Zersetzung der Oberflächenschicht. Da die grössten Abweichungen sich für rothes und violettes Licht finden, für welches Fuchsin sehr durchsichtig ist, so liegt außerdem die Vermuthung nahe, dass die verschiedenen Beobachter verschiedene dicke Schichten benutzt haben, und zwar solche, die für die mittleren Spectralfarben nahe undurchsichtig waren, aber von den äusseren verschieden viel durchliessen, also für diese auch ein sehr abweichendes Verhalten des reflectirten Lichtes ergeben mussten. Vielleicht würden sich dann die Schenk'schen Beobachtungen durch die Interferenz der an der Vorder- und Hinterfläche entweder der ganzen Schicht oder eines chemisch veränderten Oberflächenhäutchens reflectirten Strahlen erklären lassen.

Endlich gibt Hr. Merkel an:

	$C \frac{1}{2} D$	D	$E \frac{1}{2} b$	F	$F \frac{1}{2} G$
q	64°	67°	$64^\circ 30'$	$60^\circ 0'$	$48^\circ 0'$
ρ	0,092	0,170	0,396	0,536	0,507,

Werthe, welche den Schen k'schen nahe parallel laufen, bis auf die negative Reflexion, die Hr. Merkel nicht gefunden zu haben scheint.

Jedenfalls zeigt die obige Zusammenstellung, dass die Anwendung von Constanten, welche von einem Beobachter gefunden sind, zur Erklärung der Erscheinungen, die andere gemessen haben, äusserst unsicher ist, und man schon mit einem geringen Grade der Uebereinstimmung zufrieden sein muss.

Ich habe für die Vergleichung mit der in der früheren Arbeit entwickelten allgemeinen Theorie absorbirender isotroper Medien die Wiedemann'schen Beobachtungen (I) gewählt, weil sie sich durch grosse Vollständigkeit und einen besonders stetigen Verlauf der gefundenen Zahlen auszeichnen; die Glan'schen kamen, da sie für jede Farbe nur einen Zahlenwerth geben, nicht in Betracht. Freilich hat sich nachträglich ergeben, dass die Wernicke'schen Beobachtungen vollständiger durch diejenigen Constanten erklärt werden, welche aus den Merkel'schen Zahlen folgen; da indess die zur Durchführung der Vergleichung nötige Rechnung ganz ausserordentlich umständlich und zeitraubend ist, und eine wirklich vollständige Prüfung nur mit Beobachtungen, die alle an demselben Präparat angestellt sind, (also gegenwärtig überhaupt nicht) zu erreichen ist, so habe ich Bedenken getragen, die Rechnung noch einmal anzustellen.

Die von mir entwickelte allgemeine Theorie absorbirender isotroper Medien¹⁾ ergab in der Vereinfachung, welche eintritt, wenn man die Grenzbedingungen für die Verrückungen genau in der Neumann'schen Form anwendet, folgende Resultate für das Problem der Reflexion an der Oberfläche innerhalb eines durchsichtigen Mediums.

Sei α der Sinus, γ der Cosinus des Einfallswinkels φ der auffallenden Welle, n der Brechungscoefficient des ab-

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 104; speciell p. 115, 119, 120.

sorbirenden Mediums gegen das durchsichtige und α seine Absorptionsconstante; sei ferner:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha/n \\ 2\gamma_1^2 = \sqrt{4x^2 + (1 - \alpha_1^2 - x^2)^2} + (1 - \alpha_1^2 - x^2) \\ 2\beta_1^2 = \sqrt{4x^2 + (1 - \alpha_1^2 - x^2)^2} - (1 - \alpha_1^2 - x^2) \end{cases}$$

und bezeichne:

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_p = \frac{\gamma_1^2(1 - x^2) + 2x^2}{\gamma_1^2(1 + x^2)^2}, & \sigma_p = \frac{\gamma_1^2}{\beta_1^2 + \gamma_1^2}, \\ \delta_s = \frac{x(2\gamma_1^2 + x^2 - 1)}{\gamma_1^2(1 + x^2)^2}, & \delta_p = \frac{x}{\beta_1^2 + \gamma_1^2}, \end{cases}$$

so sind die sämmtlichen Resultate ausdrückbar durch die vier Hülfsinkel μ_s , ν_s , μ_p , ν_p , die folgen aus:

$$(3) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \mu_s = \frac{\gamma_1 \delta_s}{n\gamma + \gamma_1 \sigma_s}, & \operatorname{tg} \nu_s = \frac{\gamma_1 \delta_s}{n\gamma - \gamma_1 \sigma_s}, \\ \operatorname{tg} \mu_p = \frac{\gamma \delta_p}{n\gamma_1 + \gamma \sigma_p}, & \operatorname{tg} \nu_p = \frac{\gamma \delta_p}{n\gamma_1 - \gamma \sigma_p}. \end{cases}$$

Es ist nämlich:

$$(4) \quad \mu_s + \nu_s = \eta_s, \quad \mu_p + \nu_p = \eta_p$$

die absolute Verzögerung, welche der senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisirte Strahl bei der Reflexion erleidet, also:

$$(5) \quad \mu_s + \nu_s - \mu_p - \nu_p = \Delta$$

die Verzögerung des senkrecht gegen den parallel polarisierten.

Ferner sind:

$$(6) \quad R_s = E_s \frac{\sin \mu_s}{\sin \nu_s}, \quad R_p = E_p \frac{\sin \mu_p}{\sin \nu_p}$$

die Amplituden des reflectirten Lichtes, welche man aus den einfallenden E_s und E_p erhält, wenn man die durch die Reflexion eintretende elliptische Polarisation in lineare verwandelt, \Re_s , \Re_p die entsprechenden Werthe für $E_s = E_p = 1$; hiernach:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \varrho = \frac{\sin \mu_s \cdot \sin \nu_p}{\sin \mu_p \cdot \sin \nu_s} = \frac{\Re_s}{\Re_p}$$

ihr Verhältniss, wenn das einfallende Licht im Azimuth 45° polarisirt war, wodurch $E_s = E_p$ wird.

Für den Haupteinfallswinkel, der dadurch definiert ist, dass:

$$\varDelta = \frac{\pi}{2},$$

sind alle diese Werthe durch einen darüber gesetzten Strich ausgezeichnet, also gleich $\bar{\varphi}$, $\bar{\varrho}$, \bar{R}_s , \bar{R}_p .

Die Wiedemann'schen Beobachtungen geben ϱ und \varDelta für eine grössere Anzahl von Einfallswinkeln und Farben. Für die Vergleichung mit der Beobachtung sind die jeder Farbe entsprechenden Constanten n und α des Fuchsins zu bestimmen. Wie früher erörtert¹⁾, sind die Formeln zu umständlich, um alle Beobachtungen zu deren Berechnung zu combiniren, und es bleibt nichts übrig, als aus zwei herausgegriffenen Werthen — immer den der Hauptincidenz entsprechenden — n und α durch Probiren zu finden; dass dadurch die Vergleichung an Genauigkeit verliert und die auftretenden Differenzen unverhältnissmässig gross erscheinen, ist klar. Um so schwerer wiegt also die ausserordentliche Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung, die sich in der folgenden Zusammenstellung zeigt.

Der vielfältigen Anwendungen wegen theile ich für jede Farbe und jeden Einfallswinkel die Hülfsgrössen μ_s , ν_s , μ_p , ν_p und γ_1 mit, bevor ich die berechneten \varDelta und ϱ mit den beobachteten Werthen²⁾ vergleiche. Die berechneten R_s und R_p haben gleichfalls Interesse, indem Jamin³⁾ eine Methode angegeben hat, um sie einzeln zu bestimmen.

Die erste Beobachtungsreihe bezieht sich auf Licht von der Fraunhofer'schen Linie C. Hr. E. Wiedemann gibt dafür an:

$$\bar{\varphi} = 66^{\circ} 3', \quad \bar{\varrho} = 0,084.$$

Durch Probiren findet sich:

$$n = 2,216, \quad \alpha = 0,151$$

und das folgende Werthsystem:

1) W. Voigt, l. e. p. 126 u. f.

2) Die als beobachtet angegebenen Werthe sind die Mittel aus zwei verschiedenen Bestimmungen. Diese Mittel sind nicht überall richtig bestimmt und daher theilweise von mir corrigirt.

3) Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3) 19. p. 296. 1847.

Linie C.

φ	μ_s	r_s	μ_p	r_p	γ_1	Δ ber. ¹⁾	Δ beob.	Diff.
44° 4'	2° 51'	10° 51'	2° 23'	4° 45'	0,951	0,036 ₅	0,038	-0,001 ₅
46 34	2 54	11 48	2 20	4 31	0,946	0,043 ₅	0,047	+0,003 ₅
49 4	2 56	13 4	2 17	4 17	0,942	0,052 ₅	0,061	-0,008 ₅
51 34	2 59	14 45	2 13	4 2	0,937	0,064	0,068	-0,004
54 4	3 3	17 9	2 9	3 47	0,933	0,078	0,087	-0,009
56 34	3 7	20 44	2 4	3 31	0,928	0,101 ₅	0,096	+0,005 ₅
59 4	3 11	26 32	1 59	3 15	0,924	0,136	0,154	-0,018
61 34	3 17	37 10	1 53	2 59	0,920	0,198	0,213	-0,015
64 4	3 23	59 22	1 47	2 43	0,916	0,323 ₅	0,316	+0,007 ₅
66 34	3 30	99 56	1 40	2 26	0,913	0,552	0,551	+0,001
69 4	3 38	134 33	1 32	2 10	0,909 ₅	0,747	0,705	+0,042
71 34	3 48	151 21	1 23	1 53	0,906 ₅	0,844	0,845	-0,001
74 4	4 0	159 45	1 14	1 37	0,904	0,883	0,868	+0,015
76 34	4 13	164 34	1 5	1 21	0,901 ₅	0,924	0,922	+0,002
79 4	4 30	167 37	0 54	1 5	0,899 ₅	0,945	0,930	+0,015

φ	\Re_s	\Re_p	ϱ ber.	ϱ beob.	Diff.	φ	\Re_s	\Re_p	ϱ ber.	ϱ beob.	Diff.
44° 4'	0,264	0,502	0,526	0,536	+0,010	64° 4'	0,069	0,657	0,104	0,110	--0,006
46 34	0,247	0,517	0,479	0,481	-0,002	66 34	0,062	0,685	0,090 ₅	0,095	-0,004 ₅
49 4	0,226	0,533	0,424	0,440	-0,016	69 4	0,089	0,708	0,126	0,140	-0,014
51 34	0,204	0,550	0,372	0,373	-0,001	71 34	0,138	0,735	0,188	0,198	-0,010
54 4	0,180	0,569	0,317	0,320	-0,003	74 4	0,202	0,763	0,264	0,271	-0,007
56 34	0,154	0,588	0,261	0,257	+0,004	76 34	0,276	0,802	0,344	0,358	-0,014
59 4	0,124	0,611	0,204	0,213	-0,009	79 4	0,366	0,831	0,440	0,487	+0,003
61 34	0,095	0,631	0,150	0,153	-0,003						

Die Uebereinstimmung ist nicht ganz so vollkommen, wie bei den folgenden Reihen; das häufige negative Vorzeichen der Differenz in der letzten Tabelle lässt darauf schliessen, dass die Constanten n und z sich wohl noch günstiger bestimmen lassen würden. Indess ist diese Beobachtungsreihe, offenbar der geringen Intensität des reflectirten Lichtes halber auch nicht so genau, wie die folgenden; für Δ finden sich bei den wiederholten Beobachtungen Werthe, die bis zu 0,048 voneinander differiren; überdies steigt Δ für mittlere Einfallswinkel sehr stark, sodass die grosse Differenz von 0,042

1) Δ ist wie in der vorigen Abhandlung in Theilen von π angegeben, also aus Hrn. E. Wiedemann's Angaben δ erhalten durch $\Delta = 1 - 2\delta$.

für $\varphi = 69^\circ 4'$ einen Abstand des beobachteten Punktes um nur 0,010 von der berechneten Curve entspricht. Für ϱ ist die grösste Differenz zweier Beobachtungen 0,025, die des Mittels und der Theorie 0,016. Man wird also mit der Uebereinstimmung sehr zufrieden sein können.

Die zweite Reihe bezieht sich auf Licht der Linie D. Hr. E. Wiedemann gibt dafür an:

$$\varphi = 65^\circ 45', \quad \varrho = 0,225.$$

Dem entspricht etwa:

$$n = 2,00, \quad x = 0,40$$

und folgende Zusammenstellung:

Linie D.

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1	ϑ ber.	ϑ beob.	Diff.
44° 4'	7° 32'	26° 28'	6° 7'	11° 38'	0,947 ₅	0,090	0,090	± 0
46 34	7 35	28 51	6 0	11 7	0,942	0,108	0,102	+ 0,006
49 4	7 41	32 9	5 49	10 30	0,937 ₅	0,131	0,130	+ 0,001
51 34	7 52	35 17	5 39	9 52	0,933	0,158 ₅	0,150	+ 0,008 ₅
54 4	8 1	40 2	5 29	9 16	0,928	0,185	0,180	+ 0,005
56 34	8 12	46 9	5 15	8 37	0,924	0,225	0,218	+ 0,007
59 4	8 24	54 47	5 2	7 58	0,919	0,279	0,274	+ 0,005
61 34	8 40	65 55	4 46	7 14	0,915 ₅	0,348	0,344	+ 0,004
64 4	8 56	80 40	4 30	6 36	0,911 ₅	0,436	0,434	+ 0,002
66 34	9 16	97 19	4 11	5 59	0,907 ₅	0,535 ₅	0,530	+ 0,005 ₅
69 4	9 36	118 36	3 51	5 18	0,904	0,633	0,628	+ 0,005
71 34	10 2	126 44	3 30	4 39	0,901	0,714 ₅	0,724	- 0,009 ₅
74 4	10 35	137 1	3 7	3 47	0,898 ₅	0,782	0,782	± 0
76 34	11 14	148 59	2 41	3 19	0,896	0,829	0,840	- 0,011
79 4	11 48	150 25	2 15	2 40	0,894	0,874	0,880	- 0,006

φ	\Re_s	\Re_p	ϱ ber.	ϱ beob.	Diff.	φ	\Re_s	\Re_p	ϱ ber.	ϱ beob.	Diff.
44° 4'	0,294	0,520	0,565	0,552	+ 0,013	64° 4'	0,157	0,683	0,230	0,234	- 0,006
46 34	0,273 ₅	0,542	0,505	0,511	+ 0,006	66 34	0,162	0,699	0,232	0,229	+ 0,003
49 4	0,251 ₅	0,587	0,451	0,460	- 0,009	69 4	0,182	0,727	0,250	0,253	- 0,003
51 34	0,237	0,575	0,412	0,418	- 0,001	71 34	0,217	0,752	0,289	0,283	+ 0,000
54 4	0,217	0,590	0,367	0,364	+ 0,003	74 4	0,269	0,781	0,345	0,339	+ 0,000
56 34	0,198	0,611	0,325	0,327	- 0,002	76 34	0,331	0,813	0,407	0,412	- 0,005
59 4	0,179	0,633	0,282 ₅	0,288	± 0	79 4	0,414	0,843	0,491	0,498	- 0,007
61 34	0,165	0,660	0,250	0,244	+ 0,006						

Für Licht zwischen den Fraunhofer'schen Linien E und b (dritte Reihe) gibt Hr. E. Wiedemann an:

$$\bar{\varphi} = 59^\circ 48', \quad \bar{\rho} = 0.340.$$

Hieraus würde etwa folgen:

$$n = 1.37, \quad x = 0.56$$

und folgendes Werthsystem:

Linie *E1b.*

q	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	T_1	q ber.	q beob.	Diff.
44° 4'	11° 2'	56° 45'	11° 1'	24° 5'	0,902	0,182	0,168	+ 0,014
46 34	10 59	61 34	10 53	22 56	0,893	0,215	0,216	- 0,001
48 4	11 0	67 18	10 40	21 42	0,885	0,235	0,242	+ 0,013
51 34	11 2	74 12	10 26	20 22	0,876	0,302	0,300	+ 0,002
54 4	11 3	82 34	10 9	19 4	0,868	0,357	0,352	+ 0,005
56 34	11 8	91 55	9 51	17 45	0,860	0,419	0,418	+ 0,001
59 4	11 12	101 50	9 29	16 24	0,852	0,484	0,480	+ 0,004
61 34	11 23	111 48	9 2	14 57	0,845	0,551	0,546	+ 0,005
64 4	11 33	121 17	8 33	13 34	0,839	0,615	0,616	- 0,001
66 34	11 41	129 17	7 59	12 15	0,831	0,671	0,672	- 0,001
69 4	11 57	136 30	7 25	10 57	0,826	0,724	0,726	- 0,002
71 34	12 14	142 7	6 46	9 26	0,820	0,768	0,770	- 0,002
74 4	12 40	146 49	6 2	8 3	0,816	0,808	0,804	+ 0,004
76 34	13 5	150 40	5 15	8 42	0,813	0,843	0,848	- 0,005
79 4	13 16	155 5	4 26	5 24	0,808	0,881	0,874	+ 0,007

Die vierte Reihe bezieht sich auf die Linie *F*. Hr. E. Wiedemann gibt an:

$$\bar{m} = 53^\circ 0', \quad \bar{\theta} = 0,320.$$

WORANS folgt:

$$n = 1.11, \quad z = 0.43$$

und die folgende Zusammenstellung:

Linie *F*.

q	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1	Δ ber.	Δ beob.	Diff.
44° 4'	7° 20'	90° 34'	12° 42'	38° 35'	0,828	0,259	0,258	+0,001
46 34	7 1	99 10	12 46	36 53	0,814	0,315	0,316	-0,001
49 4	6 41	110 4	12 45	34 46	0,800	0,384 _s	0,374	+0,010 _s
51 34	6 18	121 59	12 44	32 41	0,786	0,460 _s	0,468	-0,007 _s
54 4	5 53	132 43	12 40	30 35	0,771	0,530	0,526	+0,004
56 34	5 26	142 46	12 32	28 29	0,756	0,595 _s	0,600	-0,004 _s
59 4	5 3	150 0	12 18	26 16	0,743	0,647	0,660	-0,013
61 34	4 37	157 31	11 55	23 57	0,731	0,696	0,702	-0,006
64 4	4 12	162 43	11 30	21 42	0,719	0,743	0,738	+0,005
66 34	3 48	166 30	10 58	19 27	0,708	0,777	0,774	+0,003
69 4	3 24	169 46	10 17	17 9	0,698	0,809 _s	0,804	+0,005 _s
71 34	3 0	172 9	9 33	14 59	0,689	0,842	0,810	+0,002
74 4	2 42	173 53	8 37	12 41	0,681	0,863	0,864	-0,001
76 34	2 22	175 17	7 38	10 36	0,674	0,866	0,886	±0
79 4	2 7	176 20	6 27	8 24	0,668	0,909	0,912	-0,003

q	\Re_s	\Re_p	ϱ ber.	ϱ beob.	Diff.	q	\Re_s	\Re_p	ϱ ber.	ϱ beob.	Diff.
44° 4'	0,127 _s	0,352 _s	0,362	0,355	+0,007	64° 4'	0,246	0,539	0,456	0,432	+0,024
46 34	0,124	0,368	0,386 _s	0,335	+0,001 _s	66 34	0,283 _s	0,571	0,496	0,471	+0,025
49 4	0,124	0,387 _s	0,320	0,317	+0,003	69 4	0,334	0,605	0,551 _s	0,528	+0,023
51 34	0,129	0,408 _s	0,317	0,319	-0,002	71 34	0,382	0,641 _s	0,596	0,594	+0,002
54 4	0,139 _s	0,431	0,323 _s	0,331	-0,007 _s	74 4	0,440	0,682	0,641 _s	0,638	+0,003
56 34	0,156 _s	0,455	0,344	0,330	+0,014	76 34	0,503 _s	0,722 _s	0,697	0,705	-0,008
59 4	0,176	0,481	0,366	0,364	+0,002	79 4	0,575 _s	0,768	0,749 _s	0,750	+0,000
61 34	0,210 _s	0,509	0,413	0,370	+0,043						

Die Uebereinstimmung ist ebenso vollständig, wie bei den vorigen Reihen, nur die vier Beobachtungen für ϱ , welche den Werthen q gleich $61^{\circ} 34'$, $64^{\circ} 4'$, $66^{\circ} 34'$, $69^{\circ} 4'$ entsprechen, fallen in so eigenthümlicher Weise neben die die übrigen verbindende stetige Curve, dass man vermuthen möchte, dass bei ihnen eine gemeinschaftliche Störung des Apparates stattgefunden hätte.

Die letzte Beobachtungsreihe, welche sich auf Licht zwischen *F* und *G* bezieht, ist, wahrscheinlich weil für diese Farbe Fuchsin ziemlich durchsichtig ist und nur wenig Licht reflectirt, viel unsicherer als die früheren, wie besonders aus den bei Wiederholung derselben Ablesung erhaltenen Werthen folgt. Ich halte daher die Vergleichung der Theorie mit dem Mittel der beobachteten Werthe allein nicht mehr für geeignet, um eine Vorstellung von der Uebereinstimmung zu geben,

sondern werde beide beobachteten Werthe neben die entsprechenden berechneten stellen. Hr. Wiedemann gibt $\varphi = 50^\circ 23'$ und $\varrho = 0,020$ an; letzteres ist nach den Beobachtungstafeln aber wohl nicht richtig und etwa durch 0,065 zu ersetzen. Dies führt auf:

$$n = 1,188_5, \quad z = 0,079$$

und folgende Zusammenstellung.

Linie $F \frac{1}{2} G$.

η	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1	Aber.	A beob.	Mittel	Diff.
44° 4'	1° 5'	37° 24'	2° 54'	18° 13'	0,661	0,096 ₈	0,056 0,330	0,143	-0,046 ₈
± 0	0 45	78 34	8 4	17 4	0,600	0,329	0,154 0,264	0,209	+0,120
-0,003	0 22	167 18	3 19	15 39	0,541	0,826	0,696 0,890	0,793	+0,033
39 4	-0 7	181 36	3 31	13 59	0,486	0,911	0,924 0,974	0,949	-0,038
64 4	-0 42	185 42	8 38	12 2	0,436	0,941	0,930 0,936	0,933	+0,008
69 4	-1 25	187 7	8 39	9 49	0,392	0,957	0,948 0,952	0,950	+0,007
74 4	-2 15	187 27	8 25	7 23	0,357	0,969	0,976 0,992	0,984	-0,015
79 4	-3 56	188 47	2 51	4 53	0,330	0,988 ₈	0,976 0,976	0,976	+0,012 ₈

η	\Re_s	\Re_p	ϱ ber.	ϱ beob.	Mittel	Diff.		
38 +0,003								
05 -0,008	44° 4'	0,031 ₀	0,161 ₇	0,192	0,085	0,210	0,147 ₅	+0,044 ₈
50 +0,000	49 4	0,013 ₃	0,182 ₂	0,073	0,059	0,092	0,075 ₅	-0,002 ₅
	54 4	0,029 ₅	0,214 ₅	0,137 ₅	0,104	0,123	0,113 ₅	+0,024
	59 4	0,069 ₁	0,254	0,272 ₅	0,272	0,273	0,272 ₅	± 0
	64 4	0,123 ₄	0,304	0,406	0,340	0,390	0,366 ₈	+0,039 ₈
	69 4	0,199 ₈	0,373	0,534	0,509	0,524	0,516 ₅	+0,017 ₈
	74 4	0,308	0,464	0,653	0,648	0,666	0,657	-0,004
	79 4	0,449	0,584	0,769	0,759	0,762	0,760 ₈	+0,008 ₈

Die Abweichungen von den Mittelwerthen sind also im ganzen bedeutend grösser, als bei den obigen genaueren Reihen, aber einerseits zeigen ihre häufig wechselnden Vorzeichen, dass sie auf der Ungenauigkeit der Beobachtungen beruhen, andererseits fallen die berechneten Werthe meist zwischen die beobachteten, sodass man die Reihe jedenfalls als eine Bestätigung der Theorie ansehen kann. Ueberdies steigt bei den vier ersten Beobachtungen die Curve für A so stark, dass bedeutenden Differenzen von A doch nur ganz geringe Abweichungen der beobachteten Punkte von der theoretischen Curve entsprechen, so hier etwa die folgenden:

$$0,020 \quad 0,010 \quad 0,008 \quad 0,030.$$

Die Wiedemann'schen Beobachtungen am Fuchsin werden also sämmtlich mit grosser Genauigkeit durch die schon früher an den Metallen erprobten Formeln für die Reflexion an absorbirenden Medien dargestellt. Beachtet man die äusserst verschiedenen Werthe, welche die Constanten der Theorie in den verschiedenen Fällen annehmen, so für:

Silber rothes Licht	$n = 0,23$	$x = 15,0$	$nx = 3,45$
Fuchsin Linie C	$n = 2,22$	$x = 0,151$	$nx = 0,335$
" $F \frac{1}{2} G$	$n = 1,19$	$x = 0,079$	$nx = 0,094$

und welche für n um fast das Zehnfache, für x um fast das Zweihundertsache variiren, sowie die äusserst verschiedene Form der Curven für A und ϱ , welche die Construction dieser Fälle ergibt, so wird man daraus einen günstigen Schluss für die Zuverlässigkeit der Theorie ziehen dürfen.

Die Wiedemann'schen Werthe lassen sich nun verwenden, um die Kräfte, welche man im Fuchsin auf den Aether wirkend annehmen muss, näher zu bestimmen. Nach den früheren Bezeichnungen¹⁾ sind unter Benutzung gewisser specialisirender Hülfsannahmen²⁾ die Energie-erhaltenden Kraftcomponenten:

$$A_1 = a A u + a' A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad B_1 = a A v + a' A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$C_1 = a A w + a' A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

und die Energie-vermindernden:

$$A_2 = c A \frac{\partial u}{\partial t}, \quad B_2 = c A \frac{\partial v}{\partial t}, \quad C_2 = c A \frac{\partial w}{\partial t},$$

worin: $A \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ ist.

Die Geschwindigkeit ω_1 und der Absorptionscoefficient x hängen mit denselben Coefficienten durch die zwei Gleichungen³⁾ zusammen:

$$m \omega_1^2 = A_1 (1 - x^2) + 2 x c_1,$$

$$0 = 2 A_1 x - c_1 (1 - x^2),$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 108. 1884.

2) W. Voigt, l. c. p. 120.

3) W. Voigt, l. e. p. 109.

worin $A_1 = e + a - (a'/\tau^2)$, $c_1 = (c/r)$ und m die Dichtigkeit, e die Elastizitätsconstante des Aethers ist, sodass im freien Aether $m\omega_0^2 = e$.

Die letzten Gleichungen zusammen ergeben:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{e(1+x^2)^2}{2exz},$$

was durch Einführung von:

$$\frac{c\pi}{Vem} = C, \quad 2\pi\tau\sqrt{\frac{e}{m}} = \lambda_0$$

auch wird: $\frac{1}{n^2} = \frac{C \cdot (1+x^2)^2}{\lambda_0 \cdot x}$.

Diese Grösse C bestimmt sich nun aus den obigen Werthen $n\lambda$ und λ_0 (letzteres in Tausendstelmillimetern gegeben) für die einzelnen beobachteten Farben wie folgt:

C	D	$E \frac{1}{2} b$	F	$F \frac{1}{2} G$
$0,019_2$	$0,048_8$	$0,090$	$0,120$	$0,025_3$

C und damit die absorbirende Kraft selbst ist also am grössten für Licht der Farbe F . Diese Werthe geben hin wiederum durch die Relation

$$\frac{A_1}{e} = \frac{C}{\lambda_0} \frac{1-x^2}{x}$$

leicht die Grössen A_1/e für dieselben Farben. Man erhält ungefähr:

$$\frac{A_1}{e} = 0,189 \quad 0,156 \quad 0,211 \quad 0,467 \quad 0,698,$$

Zahlen, welche keinen besonders regelmässigen Gang zeigen.

Diese Werthe von C und A_1/e haben natürlich wegen der ungemeinen Verschiedenheit der von verschiedenen Beobachtern gefundenen Resultate keine allgemeine Bedeutung.

Wir gehen nun dazu über, da leider keiner der Physiker, welche die elliptische Polarisation bei der Reflexion an Fuchs in Luft beobachtet haben, in einer anderen Richtung operirt hat, Hrn. Wernicke's Beobachtungen über Absorption und absolute Phasenänderung bei der Reflexion durch die Constanten zu erklären, welche aus jenen Beobachtungen folgen. Wie schon oben erwähnt, stimmen die unter Benutzung der Wiedemann'schen Resultate berechneten Werthe nicht sonderlich mit den von Hrn. Wernicke

beobachteten, besser wirken die aus Hrn. Merkel's¹⁾ Zahlen erhaltenen. Der Grund dafür ist leicht erkennbar. Hr. Merkel theilt mit, dass er mit frisch bereiteten Fuchsinspiegeln, Hr. E. Wiedemann, dass er mit alten operirt habe, und eine schnelle Veränderung der Oberflächenschicht ist auch anderweit bestätigt. Hr. Wernicke beobachtete die Verzögerung bei der Reflexion an der Grenze von Glas oder Jodsilber gegen Fuchsins und die Absorption beim Durchgang durch eine Fuchsinschicht; selbst wenn er zwischen Herstellung und Beobachtung der Präparate längere Zeit hätte verstreichen lassen, könnte man mit Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die oberflächliche Veränderung nicht durch die ganze Schicht bis zu der Grenze gegen Glas oder Jodsilber fortgeschritten gewesen ist, dass also die von Hrn. Merkel an frischen Spiegeln erhaltenen Werthe, so gut es bei der Unsicherheit über die Zusammensetzung des Fuchsins möglich ist, auf Hrn. Wernicke's Versuche anwendbar sein werden.

Zu der Vergleichung sind noch aus Hrn. Merkel's Beobachtungen die Constanten n und z der Theorie zu bestimmen. Nahe richtig findet sich durch Probiren für die übergeschriebenen Fraunhofer'schen Linien folgendes Werthsystem:

	$C \frac{1}{2} D$	D	$E \frac{1}{2} b$	F	$F \frac{1}{2} G$
λ	0,623	0,589	0,522	0,486	0,458
$\frac{q}{\lambda}$	64° 0'	67° 0'	64° 30'	60° 0'	48° 0'
q	0,092	0,170	0,396	0,536	0,507
n	2,20	2,18	1,55	0,94	0,74
z	0,18	0,30	0,74	1,00	0,80

Hrn. Schenk's Beobachtungen würden ähnliche Werthe liefern.

Diese Zahlen ergeben den Exponenten nz/λ , welcher die Grösse der Absorption für die verschiedenen Farben bestimmt:

$$\frac{nz}{\lambda} = 0,08 \quad 1,00 \quad 1,95 \quad 1,98 \quad 0,97.$$

Hrn. Wernicke's²⁾ Beobachtungen liefern für diese

1) Merkel, Wied. Ann. 19. p. 1. 1883.

2) W. Wernicke, Pogg. Ann. 159. p. 87. 1876.

Grössen keine absoluten Werthe, sondern nur relative; er erhielt bei drei verschiedenen Platten als dem obigen Ausdruck proportional:

—	1,94	2,52	2,03	1,29
—	0,71	1,11	0,85	0,69
—	0,57	0,99	0,88	0,51.

Der Verlauf der beobachteten, in sich übrigens auch stark differirenden Reihen ist durchaus parallel den berechneten; den Farben $E\ddot{b}$ entspricht der grösste Werth, den Grenzfärbchen des Spectrums der kleinste.

Bei schiefem Durchgang ist die Absorption statt durch nz/λ durch $nz/\lambda\gamma_1$ gegeben. Die Beobachtungen Hrn. Wernicke's über die Absorption bei 0 und 60° Einfall lassen also combinirt γ_1 berechnen, während auch die Merkelschen Beobachtungen seine Bestimmungen gestatten.

Wir erhalten aus ersteren folgende Werthe für γ_1 :

—	0,915	0,827	0,813	0,714
—	0,920	0,853	0,833	0,770
—	0,983	0,884	0,848	0,717

aus letzterem:

0,923	0,925	0,902	0,814	0,665.
-------	-------	-------	-------	--------

Zwei Werthe stimmen vollkommen, einer ist zu gross, einer zu klein; dass gesammte Resultat ist jedenfalls befriedigend zu nennen.

Endlich ist noch die absolute Verzögerung ν_0 bei normaler Reflexion aus den obigen Zahlen n und z zu berechnen und mit den Beobachtungen Hrn. Wernicke's¹⁾ zu vergleichen.

Wir haben für diese Versuche, bei welchen die Reflexion in Glas vom Brechungscoefficienten 1,52 am Fuchsin geschah, folgende Formeln aus dem letzten Aufsatz²⁾ anzuwenden:

$$\eta_0 = \mu_0 + \nu_0,$$

$$\operatorname{tg} \mu_0 = \frac{z}{\frac{n}{1,52} (1 + z^2) + 1}, \quad \operatorname{tg} \nu_0 = \frac{z}{\frac{n}{1,52} (1 + z^2) - 1},$$

1) W. Wernicke, Pogg. Ann. 159. p. 198. 1876.

2) W. Voigt, l. e. p. 138.

Hieraus folgt in Theilen von π die resp. Verzögerung:

0,08 0,19₃ 0,38 0,56 0,77₃.

Hrn. Wernicke's Beobachtungen ergaben:

0,08 0,18 0,38 0,54 0,72.

Die Uebereinstimmung ist eine derart vollständige, dass an einen Zufall, trotz der Unsicherheit der Combination von Beobachtungen an verschiedenen Fuchsinspräparaten nicht wohl gedacht werden kann.

Ich komme nun zu den Lundquist'schen¹⁾ Beobachtungen über die Reflexion an Fuchsins in Crownglas. Dieselben bieten zunächst das von keinem anderen Beobachter gefundene Resultat, dass für die Strahlen *B* und *C* die elliptische Polarisation negativ ist und zugleich das Amplitudenverhältniss ρ einen äusserst kleinen Werth besitzt, nämlich resp. 0,0105 und 0,0070 d. h. kaum den zehnten Theil der von Hrn. Wiedemann und Merkel in Luft gefundenen Zahlen, während die den anderen Farben entsprechenden von derselben Ordnung sind, wie die von jenen gefundenen. Beides muss den Argwohn erregen, dass es sich hier nicht um eine Eigenschaft des Fuchsins handelt, sondern um die Wirkung eines anderen Umstandes. Im vorigen Aufsatz habe ich die elliptische Polarisation bei der Reflexion an durchsichtigen Medien erwähnt²⁾ und zu ihrer Erklärung ausser auf den schon früher geltend gemachten Einfluss eines allmählichen Ueberganges von dem einem Medium ins andere, auf die Wirkung des Polirmittels aufmerksam gemacht, welches nach verschiedenen Beobachtungen³⁾ die Oberfläche der polirten Körper in einer dünnen Schicht überzieht. Welchem der beiden Umstände man nun auch grösseren Einfluss gewähren mag, sie führen darauf, dass an der Grenze von Crownglas und einem durchsichtigen Medium vom Brechungscoefficienten des Fuchsins eine negative Reflexion d. h. eine Verzögerung der Componente in der Einfallsebene stattfinden muss. Wenn nun durch die Wirkung der Absorption im Fuchsins eine Beschleunigung derselben Com-

1) C. Lundquist. Pogg. Ann. 152. p. 565. 1874.

2) W. Voigt, l. c. p. 121.

3) z. B. Conroy, Proc. Roy. Soc. 28. p. 242. 1879; 31. p. 486. 1881.

ponente eintritt, so wird diese Wirkung durch die vorige vermindert und bei kleinem Werthe des Amplitudenverhältnisses auch aufgehoben werden können. Hierdurch scheint sich ungezwungen die von Hrn. Lundquist beobachtete negative Reflexion und zugleich der kleine Werth von ρ zu erklären.

Für eine Berechnung nach unseren Formeln würden sich daher nur die Beobachtungen mit den mittleren Farben des Spectrums eignen, wenngleich auch bei ihnen das beobachtete ρ kleiner sein muss, als dem Fuchs in allein entsprechend. Es kommt hier aber noch ein weiterer Umstand in Betracht, der ein sehr ausführliches Eingehen auf jene Beobachtungen nicht räthlich scheinen lässt.

Hr. Lundquist beobachtete die Reflexion im Innern eines Crownglasprismas am Fuchs in. Augenscheinlich ist dabei die verschiedene Schwächung der beiden Componenten parallel und normal zur Einfallsebene beim Ein- und Austritt durch die Oberflächen des Prismas in Rechnung zu ziehen. Hr. Lundquist gibt auch für die Intensitätsmessungen eine Formel an, in welcher (ohne dass dessen ausdrücklich Erwähnung geschieht) dieser Einfluss berücksichtigt ist, bei den Messungen über die elliptische Polarisation findet sich aber, wenn ich mich nicht täusche, nicht die geringste Bemerkung darüber, ob bei diesen ebenfalls die betreffende Correction angebracht ist; ich bin bei der Ausführlichkeit, mit welcher sonst Nebenumstände sich erwähnt finden, daher völlig unsicher, ob die mitgetheilten Zahlen in dieser Hinsicht corrigirt sind oder nicht. Da nun die Berechnung eine äusserst langwierige Arbeit ist, so habe ich mich zunächst auf nur eine Reihe beschränkt, welche von dem fraglichen Fehler wohl weniger beeinflusst ist, als die übrigen, da bei ihr dem Polarisationswinkel ein fast genau senkrechttes Einfallen des Lichtes auf die äusseren Prismenflächen entspricht. Es ist die Reihe, welche mit Licht von der Linie *F* erhalten ist.

Aus den Beobachtungen über ρ und Δ folgt: $\rho = 0,32$, $\Delta = 45^\circ 45'$ dem entspricht nahezu: $n = 0,873$ $x = 0,34$.

Die Berechnung und Zusammenstellung der Resultate mit den Beobachtungen, welche ausser α und φ für gewisse Einfallswinkel auch $\Re_p^2 = \Im_p$ liefern, gibt folgendes Werthsystem:

φ	μ_s	ν_s	μ_p	ν_p	γ_1	α ber.	α beob.	Dif.
35°	4° 59'	122° 28'	14° 21'	80° 11'	0,797	0,183	0,179	+ 0,004
37	4 18	129 51	14 57	78 9	0,780	0,228	—	—
39	8 43	139 15	15 35	76 8	0,753	0,284	0,283	+ 0,001
42	2 22	154 13	16 30	72 16	0,720	0,377	0,381	- 0,004
44	1 28	165 5	17 8	69 35	0,698	0,448 ₅	0,445 ₅	- 0,002
45	1 1	170 15	17 27	68 11	0,687	0,476	0,474	+ 0,002
45 30°	0 46	172 46	17 36	67 28	0,682	0,491 ₅	0,492 ₆	- 0,001
46	0 32	175 9	17 45	66 45	0,678	0,506	0,507	- 0,001
47	0 2	179 40	18 3	65 15	0,665	0,536	0,537 ₅	- 0,001
48	— 0 28	183 45	18 20	63 43	0,655	0,562	0,565	- 0,003
50	— 1 31	190 41	18 56	59 82	0,634	0,611 ₅	0,614	- 0,002
53	— 3 17	198 56	19 84	55 40	0,602	0,669	0,677	- 0,008
55	— 4 18	201 22	19 43	52 14	0,586	0,695	—	—
56	— 4 48	202 50	19 51	50 31	0,575	0,709	0,719	- 0,010
60	— 7 23	207 84	19 51	43 41	0,542	0,759	0,765	- 0,006
66	— 10 54	209 11	18 31	33 25	0,501	0,816	—	—
80	— 18 49	207 22	9 55	12 22	0,444	0,924	—	—

φ	\Re_s	\Re_p	φ ber.	φ beob.	Dif.	\Im_p ber.	\Im_p beob.	Dif.
35°	0,103	0,251 ₅	0,409	0,402	+ 0,007	0,063	—	—
37	0,097 ₇	0,263 ₅	0,371	—	—	0,069	0,057	+ 0,012
39	0,095 ₅	0,277	0,344	0,336	+ 0,008	0,076 ₅	—	—
42	0,094 ₉	0,298	0,318	0,316	+ 0,002	0,089	0,087	+ 0,002
44	0,099 ₄	0,314 ₅	0,316	0,312	+ 0,004	0,099	—	—
45	0,104 ₃	0,323	0,323	0,317	+ 0,006	0,104	0,107	- 0,003
45 30°	0,107	0,327 ₅	0,327	0,318	+ 0,009	0,107	—	—
46	0,109 ₇	0,332	0,331	0,327	+ 0,004	0,110	—	—
47	0,116 ₄	0,341	0,341	0,337	+ 0,004	0,116 ₅	0,131	- 0,014 ₅
48	0,124 ₃	0,351	0,354	0,349	+ 0,005	0,123	—	—
50	0,117	0,376 ₅	0,378 ₅	0,372	+ 0,006 ₅	0,142	0,152	- 0,010
53	0,176 ₅	0,405 ₅	0,435	0,424	+ 0,011	0,164	—	—
55	0,205 ₅	0,427	0,482	—	—	0,191	0,205	- 0,014
56	0,215 ₅	0,440	0,489 ₅	0,489	+ 0,000 ₅	0,194	—	—
60	0,277 ₅	0,491 ₅	0,564 ₅	0,544	+ 0,020 ₅	0,241 ₅	—	—
66	0,388	0,577	0,672	—	—	0,334	0,385	- 0,051
80	0,702	0,804 ₄	0,873	—	—	0,647	0,692	- 0,045

Die Uebereinstimmung ist mit Ausnahme der letzten Werthe \Im_p , die wohl auch deshalb unsicher sind, weil bei so grossen Einfallswinkeln sich die Intensität schnell ändert, durchaus gut, fast besser noch als diejenige, welche Hr. Lundquist bei Berechnung seiner Beobachtungen nach der

Cauchy'schen Formel erhalten hat. Dass sie nicht so vollkommen ist, wie bei den Beobachtungen in Luft, erklärt sich wohl durch die oben erörterten Umstände zur Genüge; Hr. Lundquist macht übrigens selbst noch darauf aufmerksam, dass die Beobachtungen der Ellipticität und Intensität an ganz verschiedenen Stellen der Fuchsinschicht, also unter verschiedenen Umständen angestellt werden mussten. Das durchweg positive Vorzeichen der Differenz bei ϱ zeigt übrigens, dass das für die Berechnung gewählte $x = 0,34$ ein wenig zu gross ist.

Sämmtliche berechnete Beobachtungsreihen über die bei der Reflexion an Fuchsinschicht auftretende elliptische Polarisation, über die reflectirte Intensität, über die absolute Phasenänderung sowie über die Absorption bei normalem und schiefem Durchgang zeigen eine vollständige Uebereinstimmung mit der entwickelten Theorie absorbirender Medien.

Göttingen, Juni 1884.

IV. Zur Theorie der Absorption des Lichtes in Krystallen; von W. Voigt.

(Aus den Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1884, Nr. 9
mitgetheilt vom Herrn Verfasser.)

Nach meinen früheren Untersuchungen¹⁾ sind die allgemeinsten absorbirenden Kräfte, welche man in ponderablen Körpern auf die Volumeneinheit Aether wirksam annehmen kann, gegeben durch:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A) = A - \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right), \\ (B) = B - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right), \\ (C) = C - \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right), \end{array} \right.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 104 u. f. 1884.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXIII.

worin ABC lineare Functionen von $\partial u / \partial t = u'$, $\partial v / \partial t = v'$, $\partial w / \partial t = w'$ sind, welche die Functionen:

$$(2) \quad \Psi_1 = Au' + Bv' + Cw'$$

zu einer negativen Summe von Quadraten machen, und A_x , A_y . . . lineare Functionen von $\partial u' / \partial x$, $\partial v' / \partial x$. . . sind, welche die Function:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_2 = A_x \frac{\partial u'}{\partial x} + A_y \frac{\partial u'}{\partial y} + A_z \frac{\partial u'}{\partial z} + B_x \frac{\partial v'}{\partial x} + B_y \frac{\partial v'}{\partial y} + B_z \frac{\partial v'}{\partial z} \\ \quad + C_x \frac{\partial w'}{\partial x} + C_y \frac{\partial w'}{\partial y} + C_z \frac{\partial w'}{\partial z} \end{array} \right.$$

ebenso zu einer negativen Summe von Quadraten machen. $\Psi_1 + \Psi_2$ ist dann die pro Volumen- und Zeiteinheit verlorene Energie.

Ich werde im Folgenden eine Untersuchung dieser Kräfte für krystallinische Medien vornehmen.

Da das Problem ziemlich umständlich ist, so empfiehlt es sich von vorn herein, einige geeignete Vereinfachungen stattfinden zu lassen.

Erstens sollen die Kräfte ABC gleich Null genommen werden, weil dieselben, wie die Untersuchung der unkrystallinischen Medien gezeigt hat¹⁾, in den Bedingungen für den Uebergang des Lichtes aus einem Medium ins andere eine gewisse Schwierigkeit ergeben, man aber bei ihrer Vernachlässigung Uebereinstimmung mit der Beobachtung erhält. Das Analoge soll mit denjenigen der Energie-erhaltenden Kräften gethan werden, die sich ebenso verhalten wie ABC , d. h. ebenso, wie diese, nur von der Verschiebung des Volumenelementes als Ganzen abhängen.²⁾ Die sonach übrig bleibenden Kräfte von der Form:

$$-(A) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ u. s. f.}$$

haben dann die Eigenschaft, ebensowohl als innere Kräfte des Aethers aufgefasst werden zu können, wie als Wirkungen der ponderablen Theile auf den Aether. Das letztere ziehe ich der Anschaulichkeit halber vor.

1) W. Voigt, l. c. p. 117 und 120.

2) Vgl. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 877 und 885.

Zweitens will ich mich von vorn herein auf dreifach-symmetrische Krystalle beschränken. Hat es vielleicht auch später einmal Interesse, die allgemeineren Fälle zu untersuchen, bei welchen die Absorptionskräfte sich um andere Hauptrichtungen ordnen als die Energie-erhaltenden¹⁾), so dürfte es gegenwärtig, wo es noch fast ganz an exacten Messungen der Aenderung der Absorption mit der Richtung fehlt, doch genügen, einen einfacheren Fall zu behandeln.

Ich gehe demnach zuerst dazu über, die allgemeinsten Werthe $A_x, A_y \dots$ gemäss der Annahme der Symmetrie des Krystalles in Bezug auf die Coordinatenebenen zu specialisiren.

Diese allgemeinsten Werthe der $A_x \dots$ schreibe ich in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} -A_x &= c_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{14} \frac{\partial v'}{\partial x} + c_{15} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{16} \frac{\partial v'}{\partial z} \\ &\quad + c_{17} \frac{\partial w'}{\partial x} + c_{18} \frac{\partial w'}{\partial y} + c_{19} \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ -A_y &= c_{21} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{24} \frac{\partial v'}{\partial x} + c_{25} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{26} \frac{\partial v'}{\partial z} \\ &\quad + c_{27} \frac{\partial w'}{\partial x} + c_{28} \frac{\partial w'}{\partial y} + c_{29} \frac{\partial w'}{\partial z}. \end{aligned}$$

Damit die Function Ψ_2 eine Summe von Quadraten sei, müssen für die Constanten c_{hk} noch gewisse Relationen bestehen, auf welche ich zunächst nicht eingehere.

Ist die XY -Ebene eine Symmetrieebene, so muss ein Verrückungssystem:

$$u = U(x, y, z, t), \quad v = V(x, y, z, t), \quad w = W(x, y, z, t)$$

und ein dazu symmetrisches:

$u = U(x, y, -z, t), \quad v = V(x, y, -z, t), \quad w = -W(x, y, -z, t)$ die gleiche Arbeit absorbiren und symmetrische Componenten (A), (B), (C) erregen. Ganz analoge Schlüsse gelten, wenn auch die YZ - und ZX -Ebenen Symmetrieebenen sind.

Demzufolge darf Ψ_2 , wenn man w mit $-w$ und z mit

1) H. Laspeyres, Zeitschr. f. Kryst. 4. p. 435. 1880. Beibl. 4. p. 791. 1880.

$-z$, oder u mit $-u$ und x mit $-x$, oder v mit $-v$ und y mit $-y$ vertauscht, seinen Werth nicht ändern.

Dies ergibt die Relation:

$$c_{hk} = -c_{kh} \text{ für } h \geq k;$$

ausgenommen sind nur die Coëfficienten von:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \frac{\partial v'}{\partial y}, \quad \frac{\partial v'}{\partial y} \cdot \frac{\partial w'}{\partial z}, \quad \frac{\partial w'}{\partial z} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x}; \quad \frac{\partial u'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} \cdot \frac{\partial w'}{\partial y}, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} \cdot \frac{\partial u'}{\partial z},$$

d. h.: $c_{15}, c_{51}; c_{19}, c_{91}; c_{59}, c_{95}; c_{24}, c_{42}; c_{65}, c_{86}; c_{37}, c_{73}$.

Die Constanten, welche der Bedingung:

$$c_{hk} = -c_{kh}$$

genügen, kann man nun aber ohne weiteres gleich Null setzen, denn jene Terme, die aus der absorbirten Arbeit Ψ_2 verschwinden, können gar nicht den Charakter absorbirender Kräfte haben; in der That sind sie auch unter den Energieerhaltenden Kräften vorhanden, welche auf die elliptische und circulare Polarisation in durchsichtigen Medien führen.¹⁾

Sonach bleiben nur folgende Formeln übrig:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} -A_x = c_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{15} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{19} \frac{\partial w'}{\partial z}; \quad -A_y = c_{22} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{24} \frac{\partial v'}{\partial x}; \\ \quad -A_z = c_{33} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{37} \frac{\partial w'}{\partial x}; \\ \\ -B_x = c_{42} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{44} \frac{\partial v'}{\partial x}; \quad -B_y = c_{51} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{55} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{59} \frac{\partial w'}{\partial z}; \\ \quad -B_z = c_{66} \frac{\partial v'}{\partial z} + c_{68} \frac{\partial w'}{\partial y}; \\ \\ -C_x = c_{73} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{77} \frac{\partial w'}{\partial x}; \quad -C_y = c_{86} \frac{\partial v'}{\partial z} + c_{88} \frac{\partial w'}{\partial y}; \\ \quad -C_z = c_{91} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{95} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{99} \frac{\partial w'}{\partial z} \end{array} \right.$$

und daher:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} -\Psi_2 = c_{11} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + c_{55} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + c_{99} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + (c_{15} + c_{51}) \frac{\partial u'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v'}{\partial z} \\ \quad + (c_{19} + c_{91}) \frac{\partial w'}{\partial z} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + (c_{59} + c_{95}) \frac{\partial v'}{\partial y} \cdot \frac{\partial w'}{\partial z} \end{array} \right.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 877 und 890. 1883.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} + c_{22} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + (c_{24} + c_{42}) \frac{\partial u'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + c_{44} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 \\ + c_{33} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 + (c_{37} + c_{73}) \frac{\partial v'}{\partial z} \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} + c_{77} \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 \\ + c_{66} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + (c_{68} + c_{86}) \frac{\partial v'}{\partial z} \cdot \frac{\partial w'}{\partial y} + c_{88} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2. \end{array} \right.$$

Damit hier rechts eine Summe von neun Quadraten stehe, ist nötig, dass alle Coefficienten:

$$c_{ii} > 0$$

sind, die übrigen können auch negativ sein, dürfen aber in keinem Falle eine für jede leicht angebbare Grösse überschreiten.

Die Componenten (A) , (B) , (C) werden hiernach:

$$(A) = c_{11} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + (c_{15} + c_{24}) \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} + (c_{19} + c_{37}) \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z},$$

$$(B) = c_{44} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + c_{55} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} + (c_{59} + c_{68}) \frac{\partial^2 w'}{\partial y \partial z} + (c_{42} + c_{51}) \frac{\partial^2 u'}{\partial y \partial x},$$

$$(C) = c_{77} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + c_{88} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + c_{99} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + (c_{73} + c_{91}) \frac{\partial^2 u'}{\partial z \partial x} + (c_{95} + c_{86}) \frac{\partial^2 v'}{\partial z \partial y},$$

d. h., sie gewinnen genau dieselbe Form, in welcher die Energie-erhaltenden Kräfte für dreifach symmetrische Krystalle in die Bewegungsgleichungen eingehen¹⁾, nur dass bei jenen die letzten beiden Coefficienten in jeder Gleichung zusammen drei einfachen Bedingungen genügen, die auch in unserem Falle erfüllt wären, wenn für die allein noch übrigen Constanten:

$$c_{hk} = c_{kh}$$

wäre. Da die Annahme dieser Relationen die Berechnung bedeutend vereinfacht, so will ich sie einführen und zugleich ihr entsprechend abkürzen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{15} + c_{24} = c_{51} + c_{42} = c_3, \quad c_{19} + c_{37} = c_{91} + c_{73} = c_2, \\ c_{59} + c_{68} = c_{66} + c_{86} = c_1; \end{array} \right.$$

es ist dabei zu bemerken, dass dieselben zwar bei der vollkommen gleichen Weise, in welcher die Energie-erhaltenden

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 886. 1888.

und absorbirenden Kräfte nebeneinander stehen sehr wahrscheinlich, nichtsdestoweniger aber eine willkürliche Specialisirung des allgemeinsten Falles sind, also der Rechtfertigung durch die Beobachtung bedarf.

Ihre Einführung gestattet wegen der Relation:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

zu schreiben:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} (A) = (c_{11} + c_1 - c_2 - c_3) \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ (B) = c_{44} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + (c_{55} + c_2 - c_3 - c_1) \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ (C) = c_{77} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + c_{88} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + (c_{99} + c_3 - c_1 - c_2) \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{array} \right.$$

worin $\varphi = c_1 (\partial u' / \partial x) + c_2 (\partial v' / \partial y) + c_3 (\partial w' / \partial z)$ ist.

Setzt man diese Werthe neben den Energie-erhaltenden Kräften¹⁾ in die Bewegungsgleichungen, führt für die Constanten (die, wie früher erörtert²⁾), die Schwingungsdauer enthalten können) beiderseitig übereinstimmende Bezeichnungen ein und fasst — φ mit dem entsprechenden Glied der anderen Kräfte und dem hydrostatischen Druck zu L zusammen, so erhält man folgende Formeln:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C_{11} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + C_{13} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = B_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + C_{21} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + C_{23} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = B_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{31} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + C_{32} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial z}, \end{array} \right.$$

während zugleich $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$ ist.

Für den Fall der Fortpflanzung ebener Wellen in einer durch μ , ν , π gegebenen Richtung setze ich zur Integration:

$$u = M \Phi + M' \tau \Phi', \quad v = N \Phi = N' \tau \Phi', \quad w = P \Phi + P' \tau \Phi',$$

$$L = \frac{1}{r \omega} (Q \tau \Phi' + Q' \Phi),$$

worin $\Phi = e^{-\frac{\pi \varrho}{r \omega}} \sin \frac{1}{r} \left(t - \frac{\varrho}{\omega} \right)$, $\tau = T/2\pi$ und $\varrho = \mu x + \nu y + \pi z$.

1) l. c. p. 886.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. Nr. 7. p. 264. 1884. Wied. Ann. 23. p. 557. 1884.

Die Ausrechnung ergibt die folgenden acht Bedingungen:

$$(9) \begin{cases} \mu(Q - Q'x) = M[B_1(1 - x^2) + 2x\Gamma_1 - m\omega^2] + M'[2xB_1 - (1 - x^2)\Gamma_1], \\ \nu(Q - Q'x) = N[B_2(1 - x^2) + 2x\Gamma_2 - m\omega^2] + N'[2xB_2 - (1 - x^2)\Gamma_2], \\ \pi(Q - Q'x) = P[B_3(1 - x^2) + 2x\Gamma_3 - m\omega^2] + P'[2xB_3 - (1 - x^2)\Gamma_3], \\ \mu(Qx + Q') = M[2xB_1 - (1 - x^2)\Gamma_1] - M'[B_1(1 - x^2) + 2x\Gamma_1 - m\omega^2], \\ \nu(Qx + Q') = N[2xB_2 - (1 - x^2)\Gamma_2] - N'[B_2(1 - x^2) + 2x\Gamma_2 - m\omega^2], \\ \pi(Qx + Q') = P[2xB_3 - (1 - x^2)\Gamma_3] - P'[B_3(1 - x^2) + 2x\Gamma_3 - m\omega^2], \\ Mu + Nv + P\pi = 0, \quad M'\mu + N'\nu + P'\pi = 0. \end{cases}$$

Hierin ist:

$$(10) \begin{cases} B_1 = B_{11}\mu^2 + B_{12}\nu^2 + B_{13}\pi^2, \quad \Gamma_1 = C_{11}\mu^2 + C_{12}\nu^2 + C_{13}\pi^2, \\ B_2 = B_{21}\mu^2 + B_{22}\nu^2 + B_{23}\pi^2, \quad \Gamma_2 = C_{21}\mu^2 + C_{22}\nu^2 + C_{23}\pi^2, \\ B_3 = B_{31}\mu^2 + B_{32}\nu^2 + B_{33}\pi^2, \quad \Gamma_3 = C_{31}\mu^2 + C_{32}\nu^2 + C_{33}\pi^2. \end{cases}$$

Schreibt man diese acht Gleichungen in der Form:

$$(11) \begin{cases} -\mu R = M(i_1 - m\omega^2) + M'h_1, \quad +\mu R' = Mh_1 - M'(i_1 - m\omega^2), \\ -\nu R = N(i_2 - m\omega^2) + N'h_2, \quad +\nu R' = Nh_2 - N'(i_2 - m\omega^2), \\ -\pi R = P(i_3 - m\omega^2) + P'h_3, \quad +\pi R' = Ph_3 - P'(i_3 - m\omega^2), \\ Mu + Nv + P\pi = 0, \quad M'\mu + N'\nu + P'\pi = 0. \end{cases}$$

so bemerkt man, dass durch Elimination von $M, M', N, N', P, P', R, R'$ die Gleichung folgt:

$$(12) \begin{vmatrix} \mu & 0 & i_1 - m\omega^2 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -h & i_1 - m\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 0 & i_2 - m\omega^2 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 & -h_2 & i_2 - m\omega^2 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_3 - m\omega^2 & h_3 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_3 & i_3 - m\omega^2 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \nu & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \nu & 0 & \pi \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante ist nach einem früher mitgetheilten Satze¹⁾ gleich einer Summe von zwei Quadraten, die also einzeln verschwinden müssen. Hierdurch erhält man:

1) W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 314. 1882.

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu^2 ((i_2 - m\omega^2)(i_3 - m\omega^2) - h_2 h_3) \\ \quad + \nu^2 ((i_3 - m\omega^2)(i_1 - m\omega^2) - h_3 h_1) \\ \quad + \pi^2 ((i_1 - m\omega^2)(i_2 - m\omega^2) - h_1 h_2) \\ 0 = \mu^2 ((i_2 - m\omega^2) h_3 + (i_3 - m\omega^2) h_2) \\ \quad + \nu^2 ((i_3 - m\omega^2) h_1 + (i_1 - m\omega^2) h_3) \\ \quad + \pi^2 ((i_1 - m\omega^2) h_2 + (i_2 - m\omega^2) h_1). \end{array} \right.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist ω und π zu bestimmen; die erhaltenen Werthe in (11) eingesetzt, gestatten dann die Bestimmung der zugehörigen Werthe MNP etc., d. h. der Richtung der bezüglichen Schwingungen. Man bemerkt, dass man im allgemeinen vier elliptisch polarisierte Wellen erhält.

Die Formeln (13) sind aber trotz der schon getroffenen Vereinfachung noch zu allgemein, denn sie führen bei verschwindender Absorption auf ein complicirteres Gesetz für ω , als das Fresnel'sche. Wie früher für durchsichtige Medien gezeigt¹⁾, haben zwei verschiedene Verfügungen über die neun Constanten B die Wirkung jenes einfacheren Gesetzes zu ergeben und zugleich die Fresnel'sche und Neumann'sche Definition der Polarisationsebene zu liefern. Es erscheint passend, über die Constanten C der absorbirenden Kräfte, wegen des eigenthümlichen Verhältnisses, in welchem sie zu den Energie-erhaltenden stehen, die gleichen Verfügungen zu treffen, — abermals eine Specialisirung, die die Beobachtung zu rechtfertigen hat.

Setzt man:

$$B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_1, \quad C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_1,$$

$$B_{21} = B_{22} = B_{23} = B_2, \quad C_{21} = C_{22} = C_{23} = C_2,$$

$$B_{31} = B_{32} = B_{33} = B_3, \quad C_{31} = C_{32} = C_{33} = C_3,$$

so entspricht das Resultat der Fresnel'schen Anschauung und gibt auch die Resultate der Beobachtung über Absorption in Krystallen in einer damit übereinstimmenden Weise wieder.

Wie indess schon bei der Betrachtung der durchsichtigen Medien hervorgehoben ist, hat diese Verfügung über die

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 888 1883.

Grössen B keine besondere innere Wahrscheinlichkeit, und die Betrachtung der Werthe der Constanten C gibt für sie analoge Resultate. $C_{12} = C_{13}$ oder in der früheren Bezeichnung $c_{22} = c_{33}$ genommen, ergäbe z. B. nach (5), dass ein Verschiebungssystem u' , welches das eine mal nur eine Function von y , das andere mal dieselbe von z ist, die gleiche Energie absorbirt; dies erscheint aber neben der Annahme der kystallographischen Verschiedenheit aller drei Coordinatenachsen gewiss sehr willkürlich.

Weniger bedenklich erscheint diejenige Verfügung, welche zu den Neumann'schen Resultaten führt, nämlich:

$$(14) \quad \left| \begin{array}{l} B_{12} = B_{21} = B_3, \quad B_{23} = B_{32} = B_1, \quad B_{31} = B_{13} = B_2, \\ B_{11} = B_3 + B_2 - B_1, \quad B_{22} = B_1 + B_3 - B_2, \quad B_{33} = B_1 + B_2 - B_3, \\ \text{nebst den entsprechenden für die } C: \\ C_{12} = C_{21} = C_3, \quad C_{23} = C_{32} = C_1, \quad C_{31} = C_{13} = C_2, \\ C_{11} = C_2 + C_3 - C_1, \quad C_{22} = C_1 + C_3 - C_2, \quad C_{33} = C_1 + C_2 - C_3. \end{array} \right.$$

Das erste Tripel der Bedingungen für C sagt nämlich aus, dass in der absorbirten Arbeit Ψ_2 nach (5) die Grössen $\partial u'/\partial y$, $\partial v'/\partial x$, $\partial v'/\partial z$, $\partial w'/\partial y$, $\partial w'/\partial x$, $\partial u'/\partial z$ nur in den Combinationen:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}, \\ & \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial y}, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} \end{aligned}$$

vorkommen. Nun sind die ersten drei hiervon eben dieselben, welche allein neben $\partial u'/\partial x$, $\partial v'/\partial y$, $\partial w'/\partial z$ die Deformation des Volumenelementes bestimmen, die letzteren aber bedeuten seine Drehungscomponenten um die Coordinatenachsen; dass nur sie in Ψ_2 auftreten, hat also einen guten physikalischen Sinn. Das letzte Tripel Bedingungen für die B und C hat zwar keine so anschauliche Bedeutung, enthält aber durchaus nichts an sich Unwahrscheinliches.

Durch Einführung der Relationen (14) kann man nun die obigen Gleichungen auf neue einfachere Formen bringen.

Man erhält nach einiger Rechnung aus (13) die neuen Gleichungen für ω und x :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu^2 [(J_2 - m\omega^2)(J_3 - m\omega^2) - H_2 H_3] \\ \quad + \nu^2 [(J_3 - m\omega^2)(J_1 - m\omega^2) - H_3 H_1] \\ \quad + \pi^2 [(J_1 - m\omega^2)(J_2 - m\omega^2) - H_1 H_2], \\ 0 = \mu^2 [(J_2 - m\omega^2) H_3 + (J_3 - m\omega^2) H_2] \\ \quad + \nu^2 [(J_3 - m\omega^2) H_1 + (J_1 - m\omega^2) H_3] \\ \quad + \pi^2 [(J_1 - m\omega^2) H_2 + (J_2 - m\omega^2) H_1], \end{array} \right.$$

in denen nun aber J und H die $\mu \nu \pi$ nicht mehr explicite enthalten, sondern nur α , und zwar ist:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n = B_n (1 - \alpha^2) + 2\alpha \frac{C_n}{\iota}, \quad H_n = 2\alpha B_n - \frac{C_n}{\iota} (1 - \alpha^2). \end{array} \right.$$

Da sich auch i und h durch J und H ausdrücken lassen, so kann man zu den obigen Gleichungen (15) auch die aus (11) durch Einführung dieser Grössen folgenden stellen. Sie werden:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mu R = M [J_2 + J_3 - (J_1 \mu^2 + J_2 \nu^2 + J_3 \pi^2) - m\omega^2] \\ \quad + M' [H_2 + H_3 - (H_1 \mu^2 + H_2 \nu^2 + H_3 \pi^2)], \\ -\nu R = N [J_3 + J_1 - (J_1 \mu^2 + J_2 \nu^2 + J_3 \pi^2) - m\omega^2] \\ \quad + N' [H_3 + H_1 - (H_1 \mu^2 + H_2 \nu^2 + H_3 \pi^2)], \\ -\pi R = P [J_1 + J_2 - (J_1 \mu^2 + J_2 \nu^2 + J_3 \pi^2) - m\omega^2] \\ \quad + P' [H_1 + H_2 - (H_1 \mu^2 + H_2 \nu^2 + H_3 \pi^2)], \\ \mu R' = M [H_2 + H_3 - (H_1 \mu^2 + H_2 \nu^2 + H_3 \pi^2)] \\ \quad - M' [J_2 + J_3 - (J_1 \mu^2 + J_2 \nu^2 + J_3 \pi^2) - m\omega^2], \\ \nu R' = N [H_3 + H_1 - (H_1 \mu^2 + H_2 \nu^2 + H_3 \pi^2)] \\ \quad - N' [J_3 + J_1 - (J_1 \mu^2 + J_2 \nu^2 + J_3 \pi^2) - m\omega^2], \\ \pi R' = P [H_1 + H_2 - (H_1 \mu^2 + H_2 \nu^2 + H_3 \pi^2)] \\ \quad - P' [J_1 + J_2 - (J_1 \mu^2 + J_2 \nu^2 + J_3 \pi^2) - m\omega^2]. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (15), (16) und (17) enthalten die Lösung des gestellten Problems.

Wir wenden sie zuerst auf optisch einaxige Krystalle an, und zwar sei die Z -Axe zur Hauptaxe gewählt. Dann ist in den Formeln (15)–(17) $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, also $J_1 = J_2$, $H_1 = H_2$ und $\mu^2 + \nu^2 = \pi^2$ zu setzen, und man gewinnt folgende Wurzelsysteme für die ordinäre und extraordinäre Welle, die durch die Indices \circ und \circ' unterschieden sind:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad J_1 = m\omega_0^2, \quad H_1 = 0; \\ \text{(b)} \quad J_1 \pi^2 + J_3 \sigma^2 = m\omega_e^2, \quad H_1 \pi^2 + H_3 \sigma^2 = 0, \quad P = P' = 0. \end{array} \right.$$

Die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind hier mit den Fresnel'schen fast identisch. Constanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht auch constante Absorption. Hierin liegt das durch die Beobachtung bestätigte Resultat, dass bei einfallendem weissen Lichte die ordinäre Welle in jeder Richtung dieselbe Farbe zeigt, welche man in der Richtung der optischen Axe wahrnimmt.¹⁾ Ausführlich schreiben sich diese Gleichungen in (18):

$$(18_a) \left\{ \begin{array}{l} a) B_1(1-z_0^2) + 2\frac{C_1}{\tau}z_0 = m\omega_0^2. \\ 2B_1z_0 - \frac{C_1}{\tau}(1-z_0^2) = 0. \\ b) [B_1(1-z_e^2) + 2\frac{C_1}{\tau}z_e]\pi^2 + [B_3(1-z_e^2) + 2\frac{C_3}{\tau}z_e]\sigma^2 = m\omega_e^2 \\ [2B_1z_e - \frac{C_1}{\tau}(1-z_e^2)]\pi^2 + [2B_3z_e - \frac{C_3}{\tau}(1-z_e^2)]\sigma^2 = 0. \end{array} \right.$$

Die Werthe z ergeben sich hieraus:

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} a) z_0 = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{B_1}{C_1} \right)^2} - \tau \frac{B_1}{C_1}, \\ b) z_e = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{B_1\pi^2 + B_3\sigma^2}{C_1\pi^2 + C_3\sigma^2} \right)^2} - \tau \left(\frac{B_1\pi^2 + B_3\sigma^2}{C_1\pi^2 + C_3\sigma^2} \right). \end{array} \right.$$

Oder für gegen B kleine Werthe C unter Beschränkung auf Glieder erster Ordnung:

$$(19_a) \quad a) 2\tau z_0 = \frac{C_1}{B_1}, \quad b) 2\tau z_e = \frac{C_1\pi^2 + C_3\sigma^2}{B_1\pi^2 + B_3\sigma^2}.$$

Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht stark mit der Richtung variabel, also B_3 und B_1 nicht wesentlich verschieden, so genügt es, dafür einen mittleren Werth B einzuführen und zu schreiben:

$$(19_b) \quad a) 2\tau z_0 = \frac{C_1}{B}, \quad b) 2\tau z_e = \frac{C_1\pi^2 + C_3\sigma^2}{B}.$$

Wir wollen nun das Verhalten einer Platte von der Dicke L aus einem einaxigen absorbirenden Krystall im divergenten polarisierten Lichte untersuchen und dabei in vielbenutzter Weise annehmen, die Platte sei so klein, dass man sie als ein Stück einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Kugelschale ansehen kann, aus deren Mittelpunkt die Lichtstrahlen ausgehen.

1) Haidinger, Pogg. Ann. 65. p. 1. 1845.

Setze ich dann die gegenseitige Verzögerung des ordinären und extraordinären Strahles in einer Richtung, welche den Winkel γ mit der optischen Axe macht, gleich δ , den Winkel, den in dieser Richtung die Schwingungsebene des Polarisators mit dem Hauptschnitt macht, α , den analogen für die Schwingungsrichtung des Analysators β , die einfalende Amplitude A , so wird parallel der Schwingungsebene des Analysators nach dem Austritt aus demselben eine Intensität erhalten werden, welche ist:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} J = A^2 [\cos^2 \alpha \cos^2 \beta e^{-2x_0 l_0} + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta e^{-2x_e l_e} \\ \quad + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta \cos \delta e^{-(x_0 l_0 + x_e l_e)}] \end{array} \right.$$

Hier ist kurz gesetzt:

$$\frac{L}{\iota \omega_0} = l_0, \quad \frac{L}{\iota \omega_e} = l_e,$$

und von dem Verlust durch die innere und äussere Reflexion abgesehen.

Da δ mit wachsendem γ selbst wächst, so folgt, dass sich im allgemeinen abwechselnd helle und dunkle Ringe um die Axe zeigen müssen. Ist dies, trotzdem parallel der optischen Axe die Absorption gering ist, nicht der Fall — wie es Hr. Lommel im blauen Licht am Magnesiumplatin-cyanür beobachtet hat¹⁾, — so folgt daraus, dass in einiger Entfernung von der Axe das δ enthaltende Glied unmerklich werden, d. h. der Absorptionsindex x_e mit γ wachsen muss. Wegen der Natur der Exponentialgrösse ist dabei noch kein besonders schnelles Wachsen nötig, um in kleiner Entfernung schon das Glied vernachlässigen zu können.

Führt man diese Eigenschaft von x_e ein, welche nach dessen Werth (19_b) nur verlangt, dass $C_3 > C_1$ ist, so enthält obige Formel (20) die vollständige Erklärung der Lommelschen Beobachtungen am Magnesiumplatin-cyanür.

Nehmen wir zunächst die der Axe unmittelbar benachbarten Richtungen, so ergibt sich, da dort $x_e = x_0$, $l_e = l_0$ ist, die gewöhnliche Formel für durchsichtige Medien und dem-

1) Lommel, Wied. Ann. 9. p. 108. 1880.

gemäss bei gekreuzten Schwingungsebenen Dunkelheit, bei parallelen Helligkeit.

Schon in kleiner Entfernung von der Axe ist aber die Formel gültig:

$$(21) \quad J = A^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta e^{-2n_0 l_0}.$$

Diese sagt den Inhalt von Hrn. Lommel's Beobachtung¹⁾ aus:

„Bei gekreuzten Schwingungsebenen sieht man ein rechtwinkliges Kreuz ohne Interferenzringe.“

„Dreht man nun das Polariskop, so bleibt der zu der Schwingungsrichtung des Polarisators senkrechte Balken des Kreuzes unverändert stehen, während der andere Balken sich mit dem Polariskop dreht, indem er zu der Schwingungsebene desselben normal bleibt.“

„Man erhält also ein schiefwinkliges Kreuz, dessen Arme wie vorher vollkommen dunkel sind“, d. h. J ist gleich Null für $\alpha = \pi/2$ und $\beta = \pi/2$. „Zugleich erscheinen die spitzwinkligen Quadranten dunkler als die stumpfwinkligen.“

„Stellt man endlich die Schwingungsebene des Polariskops parallel zu derjenigen des Polarisators, so bleiben nur noch die auf dieser gemeinsamen Richtung normalen Kreuzarme übrig als zwei dunkle Sectoren, welche durch einen schmalen, gegen die Sectoren scharf begrenzten Zwischenraum voneinander getrennt sind.“

Wie aus der Erscheinung im blauen polarisierten Lichte die im weissen sich ableitet, hat Hr. Lommel selbst erörtert.

Für den Fall natürliches blaues Licht einfällt und nach dem Durchgang durch einen Analysator betrachtet wird²⁾, ergibt sich die Formel aus (20), indem man den Mittelwerth für alle möglichen Werthe α bildet. Man erhält dann:

$$(22) \quad J = \frac{A^2}{2} \cos^2 \beta e^{-2n_0 l_0},$$

1) Lommel, I. c. p. 109. In den citirten Sätzen ist nur gemäss unserer Auffassung, dass Schwingungs- und Polarisationsrichtung zusammenfallen, das Wort „parallel“ überall durch „normal“ ersetzt.

2) Analoges gilt für den Fall, dass polarisiertes Licht einfällt und ohne Analysator mit blossem Auge beobachtet wird.

d. h. „man gewahrt im blauen Lichte bei jeder Stellung des Polariscope und stets normal zu dessen Schwingungsebene zwei dunkle Büschel . . . ohne Interferenzringe¹⁾“ — dabei ein helles Axenbild.

Fällt unpolarisiertes blaues Licht ein, so ist auch für alle Werthe β das Mittel in Formel (22) zu nehmen. Die Büschel verschwinden dann, und es bleibt nur ein hellerer Fleck in der Richtung der Axe übrig.²⁾ Dass mit der starken Absorption des extraordinären Strahles für blaues Licht die theilweise Polarisation des durchgegangenen in dem Hauptschnitt, sowie die blaue Farbe des von einfallendem weissen Lichte herrührenden reflectirten direct zusammenhängt, ist nach unserer Theorie ohne weiteres klar.

Die bisher erörterten Phänomene entsprechen dem Falle, dass in dem Werthe von α_0 die Grösse $C_3 > C_1$ war. Im umgekehrten Falle $C_1 > C_3$ folgen etwas andere Erscheinungen. α_0 ist dann gross, und α_0 nimmt mit wachsendem γ ab, sodass in der Richtung der Axe aus (20) stets Dunkelheit folgt und erst in einiger, möglicherweise ziemlich bedeutender Entfernung das Glied:

$$J = A^2 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha e^{-2\alpha_0 l_0}$$

merkliche Werthe bekommt. Hier würden also zwei dunkle Büschelpaare parallel zur Schwingungsebene des Polarisators und Analysators liegen, desgleichen wenn natürliches Licht einfällt, ein Büschelpaar parallel der Schwingungsebene des Analysators auftreten. Auch diese Erscheinung ist stets von Dunkelheit in der Richtung der Axe begleitet. Die Voraussetzung $C_1 > C_3$ ist beim Turmalin erfüllt und demgemäß der dunkle Fleck in der Richtung der Axe auch beobachtet worden³⁾; eine Notiz über die Büschel bei Anwendung polarisirten Lichtes habe ich nicht finden können.

Wir gehen nun zu optisch zweiaxigen Krystallen (nach der gemachten Beschränkung zunächst nur solchen des rhombischen Systemes) über.

1) Lommel l. c. p. 111, schon früher beobachtet von Bertrand, Zeitschr. f. Kryst. 3. p. 645. 1879.

2) Bertrand l. c. p. 645.

3) Bertrand l. c. p. 645.

Da hier die allgemeinen und sehr complicirten Formeln (15) bis (17) eintreten, so betrachten wir zunächst specielle Fälle, und zwar zuerst die Fortpflanzung des Lichtes parallel den drei Hauptaxen.

1) Es wird für die:

$$X\text{-Axe}, \nu = \pi = 0, \mu = 1, M = M' = 0.$$

Daher:

$$\begin{aligned} (J_2 - m\omega^2)(J_3 - m\omega^2) - H_2 H_3 &= 0, \quad (J_2 - m\omega^2)H_3 + (J_3 - m\omega^2)H_2 = 0 \\ o &= N(J_3 - m\omega^2) + N' H_3, \quad 0 = NH_3 - N'(J_3 - m\omega^2) \\ o &= P(J_2 - m\omega^2) + PH_2, \quad 0 = PH_2 - P'(J_2 - m\omega^2). \end{aligned}$$

Also zwei Wurzelsysteme:

$$(23a) \begin{cases} a) J_2 = m\omega^2, H_2 = 0, N = N' = 0, \text{ also } \parallel Z \\ b) J_3 = m\omega^2, H_3 = 0, P = P' = 0, \text{ also } \parallel Y. \end{cases}$$

Dieselbe Betrachtung gibt für die anderen Hauptrichtungen folgende Werthpaare:

$$2) Y\text{-Axe}, \mu = \pi = 0, \nu = 1, N = N' = 0,$$

$$(23b) \begin{cases} a) J_3 = m\omega^2, H_3 = 0, P = P' = 0, \text{ also } \parallel X \\ b) J_1 = m\omega^2, H_1 = 0, M = M' = 0, \text{ also } \parallel Z. \end{cases}$$

$$3) Z\text{-Axe}, \mu = \nu = 0, \pi = 1, P = P' = 0,$$

$$(23c) \begin{cases} a) J_1 = m\omega^2, H_1 = 0, M = M' = 0, \text{ also } \parallel Y \\ b) J_2 = m\omega^2, H_2 = 0, N = N' = 0, \text{ also } \parallel X. \end{cases}$$

Diese Zusammenstellung zeigt, dass in den drei Hauptrichtungen der gleichen Geschwindigkeit (gegeben durch ein bestimmtes J_h) auch die gleiche Absorption entspricht. Oder mit anderen Worten: diejenigen Wellen, welche bei zu einander senkrechter Fortpflanzungsrichtung auch zu einander senkrechte Schwingungen haben, werden gleich stark absorbiert, zeigen also die gleiche Farbe.

Damit ist das experimentelle Resultat, welches zuerst von Haidinger¹⁾ und nach ihm von anderen fälschlich gegen die Neumann'sche Définition der Polarisationsebene geltend gemacht ist, als mit dieser Definition durchaus verträglich streng aus der Theorie abgeleitet und anscheinend sogar wahrscheinlicher gemacht, als das entgegengesetzte.²⁾

1) Haidinger, Pogg. Ann. 86. p. 181. 1852 reproduciert von Mouson, Physik 2. p. 630. 1872. Müller-Pouillet, Physik 1. p. 804. 1864.

2) Ich kann den Beweis, welchen Hr. Lommel (Wied. Ann. 8. p. 634. 1879) für die Fresnel'sche Ansicht anführt, nicht für sicherer

Ferner seien die Hauptebenen betrachtet.

Für die XZ -Ebene ist: $\nu=0$, $\mu M+\pi P=0$, $\mu M'+\pi P'=0$.

Man erhält demgemäß aus den zwei Gleichungen (16) folgende zwei zusammengehörige Paare neuer, welche den beiden Wellen entsprechen:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } J_2 = m\omega^2, H_2 = 0 \text{ dazu nach (17) } N = N' = 0; \\ \text{diese Welle schwingt also parallel der } XZ\text{-Ebene.} \\ \text{b) } J_1\pi^2 + J_3\mu^2 = m\omega^2, H_1\pi^2 + H_3\mu^2 = 0. \end{array} \right.$$

Die Formeln für die anderen Hauptebenen folgen hieraus durch cyclische Vertauschung der Indices und der $\mu\nu\pi$ und MNP . Man bemerkt, dass in den Hauptebenen sich nur zwei Wellen fortpflanzen, und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch Formeln gegeben werden, die den bezüglichen Fresnel'schen völlig analog gebildet sind. Constanter Geschwindigkeit entspricht constante Absorption.

Die Gleichungen für die beiden Wurzeln α lassen sich in diesem Falle auch leicht lösen. Man erhält die beiden Werthe:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \alpha = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{B_2}{C_2} \right)^2 - r \frac{B_2}{C_2}} \\ \text{b) } \alpha = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{B_1\pi^2 + B_3\mu^2}{C_1\pi^2 + C_3\mu^2} \right)^2 - r \frac{B_1\pi^2 + B_3\mu^2}{C_1\pi^2 + C_3\mu^2}}, \end{array} \right.$$

oder für so kleine Werthe C , dass man ihr Quadrat neben dem der B vernachlässigen kann:

$$(25_a) \quad \text{a) } 2\alpha r = \frac{C_2}{B_2}, \quad \text{b) } 2\alpha r = \frac{C_1\pi^2 + C_3\mu^2}{B_1\pi^2 + B_3\mu^2},$$

das für die übrigen Hauptebenen Gültige folgt hieraus durch cyclische Vertauschung der Indices.

halten, als den Haidinger's. Bei den angezogenen Fluorescenzerscheinungen dringt das Licht doch in endliche Tiefen des fluorescirenden Mediums ein und tritt aus endlichen Tiefen aus; es erscheint demnach durchaus nicht selbstverständlich, dass die Fluorescenz derselben Kryallfläche nur von der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes abhängt. Wie aber die theoretische Behandlung einer zu erklärenden Erscheinung die entgegengesetzte Entscheidung wahrscheinlich machen kann, als die direkte Anschauung der Erscheinung selbst, wird durch das oben behandelte Problem bedeutungsvoll illustriert.

Ist $B_3 > B_2 > B_1$, so erhält die XZ -Ebene die optischen Axen; ihre Winkel χ mit der Z -Axe sind in obiger Annäherung gegeben durch:

$$(26) \quad \cos^2 \chi = \frac{B_3 - B_2}{B_3 - B_1}, \quad \sin^2 \chi = \frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1}.$$

Man bemerkt, dass sich bei absorbirenden optisch zweifachen Krystallen in der Richtung der optischen Axen zwar für die Geschwindigkeiten nur ein Werth ergibt, nicht aber für die Absorptionsindices. Bezeichnet man die parallel der XZ -Ebene schwingende Welle in der Richtung der optischen Axe mit α , die normal dazu mit ϵ , so wird:

$$(27) \quad 2\tau \alpha_0 = \frac{C_2}{B_2}, \quad 2\tau \alpha_\epsilon = \frac{C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_3 - B_1)}{B_3(B_3 - B_1)}.$$

Bei stark verschiedenen Werthen C_1 , C_2 , C_3 wird also auch das parallel einer optischen Axe fortgepflanzte Licht mehr oder weniger polarisiert sein. Dass dies der Wirklichkeit entspricht, kann man leicht z. B. am Epidot wahrnehmen.

Für beliebige Richtungen werden die Gesetze für ω und α so complicirt, dass man kaum für die Vergleichung mit der Beobachtung geeignete Formeln erhalten dürfte, so lange man beliebig grosse Werthe α zulässt. Da indessen bei allen Krystallen, die im durchgehenden Licht beobachtet sind, α sehr klein ist, so genügt für sie vollständig eine Annäherung, welche die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf C_1 , C_2 , C_3 und α vernachlässigt.

Dieselbe liefert die folgenden einfacheren Formeln aus den Gleichungen (15):

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu^2}{B_1 - m\omega^2} + \frac{\nu^2}{B_2 - m\omega^2} + \frac{\pi^2}{B_3 - m\omega^2} = 0, \\ \mu^2[C_3(B_3 - m\omega^2) + C_2(B_2 - m\omega^2)] + \nu^2[C_1(B_3 - m\omega^2) + C_3(B_1 - m\omega^2)] \\ \quad + \pi^2[C_2(B_1 - m\omega^2) + C_1(B_2 - m\omega^2)] \\ 2\tau \alpha = \frac{\mu^2[B_3(B_3 - m\omega^2) + B_2(B_2 - m\omega^2)] + \nu^2[B_1(B_3 - m\omega^2) + B_3(B_1 - m\omega^2)]}{\mu^2[B_2(B_1 - m\omega^2) + B_1(B_2 - m\omega^2)] + \nu^2[B_3(B_1 - m\omega^2) + B_1(B_3 - m\omega^2)]} \end{array} \right.$$

Das Gesetz der Forpflanzungsgeschwindigkeiten wird also hiernach mit dem Fresnel'schen identisch, und dies macht begreiflich, dass die Beobachtungen an gefärbten Krystallen dasselbe bestätigt haben.

Die Amplituden $M' N' P'$ werden mit den C zugleich unendlich klein erster Ordnung. Da die Wurzeln der ersten Gleichung (28) sich bekanntlich in rationaler Form gesondert darstellen lassen, wenn man statt der Winkel der Wellennormale gegen die Symmetrieachsen des Krystals diejenigen gegen die optischen Axen einführt, so kann man in der benutzten Annäherung dasselbe mit den zugehörigen Absorptionsindices α thun.

Nennt man die Winkel der Wellennormale mit den beiden optischen Axen u und v , so ist bekanntlich für die sogenannte ordinäre und extraordinäre Welle:

$$(29) \quad \begin{cases} m \omega_o^2 = B_1 + (B_3 - B_1) \sin^2 \frac{u-v}{2}, \\ m \omega_e^2 = B_1 + (B_3 - B_1) \sin^2 \frac{u+v}{2}. \end{cases}$$

Ausserdem ist:

$$\mu \sqrt{\frac{B_3 - B_1}{B_3 + B_1}} = \sin \frac{u-v}{2} \cdot \sin \frac{u+v}{2},$$

$$\pi \sqrt{\frac{B_3 - B_1}{B_3 + B_1}} = \cos \frac{u-v}{2} \cdot \cos \frac{u+v}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe folgt:

$$(30) \quad \begin{cases} 2 \pi \alpha_o = \left((B_3 - B_1) \sin^2 \frac{u-v}{2} \cdot \cos^2 \frac{u-v}{2} \left(\frac{C_1 - C_2}{B_1 - B_2} \sin^2 \frac{u+v}{2} + \frac{C_2 - C_3}{B_2 - B_3} \cos^2 \frac{u+v}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + C_1 \cos^2 \frac{u-v}{2} \cdot \sin^2 \frac{u+v}{2} - C_2 \sin^2 \frac{u-v}{2} \cdot \cos^2 \frac{u+v}{2} \right) \right. \\ \left. \left(B_3 \sin^2 \frac{u-v}{2} + B_1 \cos^2 \frac{u-v}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{u-v}{2} - \cos^2 \frac{u+v}{2} \right) \right) \\ 2 \pi \alpha_e = \left((B_3 - B_1) \sin^2 \frac{u+v}{2} \cdot \cos^2 \frac{u+v}{2} \left(\frac{C_1 - C_2}{B_1 - B_2} \sin^2 \frac{u-v}{2} + \frac{C_2 - C_3}{B_2 - B_3} \cos^2 \frac{u-v}{2} \right) \right. \\ \left. \left. + C_1 \cos^2 \frac{u+v}{2} \sin^2 \frac{u-v}{2} - C_2 \cos^2 \frac{u-v}{2} \sin^2 \frac{u+v}{2} \right) \right. \\ \left. \left(B_3 \sin^2 \frac{u+v}{2} + B_1 \cos^2 \frac{u+v}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{u+v}{2} - \cos^2 \frac{u-v}{2} \right) \right) \end{cases}$$

Diese Formeln geben die Absorption beider Wellen in beliebigen Richtungen. Setzt man hinein $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, $u = v$, so gelangt man zu:

$$2\tau x_o = \frac{C_1}{B_1}, \quad 2\tau x_e = \frac{C_1 \cos^2 u + C_3 \sin^2 u}{B_1 \cos^2 u + B_3 \sin^2 u},$$

d. h. zu den obigen Formeln (19_a) für einaxige Krystalle.

Besondere Wirkungen der Absorption werden in optisch zweiaxigen Krystallen in der unmittelbaren Umgebung der optischen Axen beobachtet. Um die Formeln dafür abzuleiten, will ich eine Richtung betrachten, die den gegen 2χ kleinen Winkel u mit der einen optischen Axe macht und in einer Ebene liegt, die um den Winkel ψ gegen die Ebene XZ d. h. die der optischen Axen geneigt ist. Dabei mag $\psi = 0$ sein, wenn die betrachtete Richtung nach der Z -Axe hin liegt. Da 2χ der Winkel der optischen Axen ist, so folgt:

$$v = 2\chi - u \cos \psi$$

und, wenn man die Quadrate von u vernachlässigt, erhält man aus den Formeln (30) die für Richtungen in der Nähe der einen optischen Axe gültigen:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\tau x_o = \frac{[C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)] \cos^2 \frac{\psi}{2} + C_2(B_3 - B_1) \sin^2 \frac{\psi}{2}}{B_2(B_3 - B_1)} \\ 2\tau x_e = \frac{[C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)] \sin^2 \frac{\psi}{2} + C_2(B_3 - B_1) \cos^2 \frac{\psi}{2}}{B_2(B_3 - B_1)} \end{array} \right.$$

oder in anderer Form:

$$(31_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2B_2 \tau x_o = (C_1 \cos^2 \chi + C_3 \sin^2 \chi) \cos^2 \frac{\psi}{2} + C_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ 2B_2 \tau x_e = (C_1 \cos^2 \chi + C_3 \sin^2 \chi) \sin^2 \frac{\psi}{2} + C_2 \cos^2 \frac{\psi}{2}. \end{array} \right.$$

Sie ergeben x_o und x_e von ψ , nicht aber von u abhängig, und zeigen, dass wenn man aus der XZ -Ebene heraus in einem engen Kreiskegel um die optische Axe herumgeht bis wieder in die XZ -Ebene, x_o sich ebenso ändert, als x_e beim Gehen in der entgegengesetzten Richtung.

Für die optische Axe selbst werden diese Formeln unbestimmt, weil dort ψ seine Bedeutung verliert; man muss daher für diese Richtung, welche durch den Index ' ange deutet werden mag, die Formeln (27) benutzen, welche ergeben, dass der in der XZ -Ebene schwingenden Welle entspricht:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\tau x_o' = \frac{C_2}{B_2} \\ \text{der senkrecht dazu schwingenden:} \\ 2\tau x_e' = \frac{C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)}{B_2(B_3 - B_1)} \end{array} \right.$$

oder auch:

$$(27a) \quad 2B_2\tau x_o' = C_2, \quad 2B_2\tau x_e' = C_1 \cos^2 \chi + C_3 \sin^2 \chi.$$

Man kann hiernach die Werthe x für die optischen Axen aus den allgemeinen Ausdrücken (31) erhalten, indem man $\psi = \pi$ setzt.

Für die Discussion bieten sich ausser dem singulären Fall constanter Absorption, für welchen $C_1 = C_2 = C_3 = C$ und daher $2\tau x_o = 2\tau x_e = C/B_2$ ist, besonders die zwei speziellen Fälle, dass in den Gleichungen (31) entweder der erste oder der zweite Factor des Zählers den anderen an Grösse bedeutend übertrifft, sodass man diesen verschwindend setzen kann. Wir unterscheiden sie in folgender Weise:

I. Specialfall: $C_2 = 0$, d. h. die in der Ebene der optischen Axen fortgepflanzte und ihr parallel schwingende Welle wird nur unmerklich absorbiert, wie dies angenähert beim Andalusit stattfindet. Dann ist:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_o = k \cos^2 \frac{\psi}{2}, \quad x_e = k \sin^2 \frac{\psi}{2} \quad \text{und} \\ k = \frac{C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)}{2\tau B_2(B_3 - B_1)}. \end{array} \right.$$

In der Richtung der optischen Axe ist nach der obigen Regel: $x_o' = 0, \quad x_e' = k$.

II. Specialfall: $C_1 = C_3 = 0$, d. h. die in der Ebene der optischen Axen fortgepflanzte und dazu normal schwingende Welle wird nur unmerklich absorbiert, wie dies für gewisse Farben angenähert beim Epidot der Fall ist.¹⁾ Dann ist:

1) Der Epidot ist zwar nicht rhombisch, sondern monoklinisch, die obigen Entwickelungen sind also nicht streng auf ihn anwendbar. Indessen dürfte es, so lange die Winkel zwischen den Elasticitäts- und Absorptionsachsen nur klein sind, unbedenklich sein, auf ihn zu exemplifizieren, zumal wenn es sich nicht um die Aufstellung und Prüfung quantitativer Gesetze handelt.

$$(33) \quad x_o = k \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad x_e = k \cos^2 \frac{\psi}{2} \quad \text{und} \quad k = \frac{C_2}{2\pi B_2},$$

also in der Richtung der optischen Axe:

$$x_o' = k, \quad x_e' = 0.$$

Betrachtet man eine Platte von der Dicke L senkrecht zu einer optischen Axe geschnitten in einer so kleinen Ausdehnung, dass man sie wiederum als Stück einer Kugelschale um die Lichtquelle als Mittelpunkt ansehen kann, im Polarisationsapparat, bezeichnet mit α den Winkel der Schwingungsebene des Polarisators mit der Ebene der optischen Axen, mit β den analogen Winkel für den Analysator, so ist die beobachtete Intensität gegeben durch:

$$(34) \quad J = A^2 \left[\sin^2 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \sin^2 \left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2x_o l_o} + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \cos^2 \left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2x_e l_e} \right. \\ \left. + 2 \sin \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \sin \left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) \cos \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \cos \left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) \cos \delta e^{-(x_o l_o + x_e l_e)} \right].$$

Hierin ist δ der Gangunterschied der beiden in der durch u und ψ gegebenen Richtung fortgepflanzten Wellen, deren Schwingungsebenen, resp. die Winkel $-(\pi - \psi)/2$ und $\psi/2$ mit der Ebene der optischen Axen machen. Ferner ist kurz gesetzt:

$$L/\tau \omega_o = l_o, \quad L/\tau \omega_e = l_e.$$

In der Richtung der optischen Axe selbst aber gilt, da auch da zwei Componenten in verschiedener Intensität, wenn auch mit gleicher Geschwindigkeit, fortgepflanzt werden:

$$(34_a) \quad J = A^2 \left(\cos \alpha \cos \beta e^{-x_o' l_o'} + \sin \alpha \sin \beta e^{-x_e' l_e'} \right)^2.$$

Man kann also auch auf die Intensität J die obige Regel anwenden, dass man den für die Richtung der optischen Axen gültigen Werth durch Einführung von $\psi = \pi$, ausserdem von $\delta = 0$ erhält.

Da $\cos \delta$ mit wachsender Entfernung u von der optischen Axe periodisch Maxima und Minima erreicht, so erhält man im allgemeinen helle und dunkle Ringe um die Axen. Der Einfluss der Absorption auf die Erscheinung stellt sich am klarsten heraus, wenn man die Platte so dick nimmt, dass

das Ringsystem verschwindet, indem die in $\cos \delta$ multiplizierte Exponentialgrösse in Formel (34) sehr klein wird.

Dann sind trotzdem die beiden ersten Glieder in (34) beizubehalten, weil ihre Exponenten in gewissen Richtungen sehr klein werden können, der des dritten nach seiner Bedeutung (31) — (33) aber nicht.

Zunächst sei Polarisator und Analysator gekreuzt, also: dann folgt:

$$J = \frac{A^2}{4} \sin^2(2\alpha - \psi) \left(e^{-2s_o l_o} + e^{-2s_e l_e} \right),$$

oder in derselben Annäherung:

$$(35) \quad J = \frac{A^2}{4} \sin^2(2\alpha - \psi) \left(e^{-s_o l_o} + e^{-s_e l_e} \right)^2,$$

daraus durch Einführung von $\psi = \pi$:

$$(35_a) \quad J' = \frac{A^2}{4} \sin^2 2\alpha \left(e^{-s_o' l_o'} + e^{-s_e' l_e'} \right)^2.$$

Da α der Winkel der einfallenden Schwingungsebene, ψ das Azimuth der betrachteten Richtung gegen die Ebene der optischen Axen ist, so gibt der erste Factor von J die Intensität Null in Ebenen, die durch $\psi = 2\alpha$ definiert sind, d. h. die für $\alpha = 0$ oder $\pi/2$ (Normallage) in die Ebene der optischen Axen fallen und bei einer Drehung des Krystalles gegen die Schwingungsebene des Polarisators sich doppelt so schnell gegen diesen drehen, bei $\alpha = \pi/4$ (Diagonallage), also normal gegen die Ebene der optischen Axen stehen u. s. f.

Dies sind die gewöhnlichen dunklen Curven, welche auch durchsichtige Krystalle im Polarisationsapparat zeigen. Doch erscheinen sie in der Richtung der optischen Axe durch die Absorption modifizirt, denn Formel (35_a) zeigt, dass sie in der Diagonallage des Krystalles ($\alpha = \pi/4$) dort unterbrochen sind durch eine helle Stelle und nur in der Normallage ($\alpha = 0$ oder $\pi/2$) sich durch die optischen Axen fortsetzen. Diese Erscheinung ist bei vielen Krystallen zu beobachten, die zu schwach absorbiren, um das Folgende auch zu zeigen. J hängt nämlich auch noch von dem zweiten Factor in

(35) ab, welcher, wie man leicht nachweisen kann, ganz allgemein für alle Werthe der Absorptionsconstanten C

ein Maximum für $\psi = 0$ und π ,

ein Minimum für $\psi = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$

besitzt. Es ergeben sich demnach allgemein für alle Lagen der Krystallplatte im Polarisationsapparat dunkle Büschel in der Richtung normal zur Ebene der optischen Axen. Man erkennt dieselben am deutlichsten, wenn sie im Raum zwischen die intensiveren Minima fallen, welche durch den ersten Factor gegeben sind, d. h. in der Normallage der Krystallplatte, aber sie sind auch in den anderen Lagen zu bemerken. Sie drehen sich zusammen mit der Krystallplatte.

Die Beobachtung bestätigt diese Schlüsse in allen Einzelheiten. —

Stehen Polarisator und Analysator parallel, so ist $\alpha = \beta$, also unter der Annahme beträchtlicher Dicke der Platte:

$$(36) \quad J = A^2 \left[\sin^4 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2x_0 l_0} + \cos^4 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2x_e l_e} \right],$$

in der Richtung der optischen Axe:

$$(36_a) \quad J' = A^2 \left[\cos^4 \alpha e^{-2x'_0 l'_0} + \sin^4 \alpha e^{-2x'_e l'_e} \right].$$

Dieser Fall wird am bequemsten mit dem folgenden zusammengefasst, dass entweder der Polarisator oder Analysator beseitigt ist, man z. B. nur eine Turmalinplatte vor oder hinter die Krystallplatte hält. Die Formel hierfür folgt aus (34), indem man den Mittelwerth für alle möglichen Werthe α oder β nimmt, und lautet:

$$(37) \quad J = \frac{A^2}{2} \left[\sin^2 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2x_0 l_0} + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2x_e l_e} \right],$$

$$(37_a) \quad J' = \frac{A^2}{2} \left[\cos^2 \alpha e^{-2x'_0 l'_0} + \sin^2 \alpha e^{-2x'_e l'_e} \right].$$

Die Vergleichung der Gleichungen (36) und (37) zeigt zunächst das Resultat:

Die Erscheinung bei parallelen Polarisationsebenen ist im wesentlichen identisch mit derjenigen, welche man nach Entfernung des Polarisators oder Analysators erhält.

Auch dies merkwürdige Resultat bestätigt die Beobachtung.

Ferner zeigt sich bei näherem Eingehen, dass in diesen Fällen (36) und (37) verschiedenartig absorbirende Krystalle verschiedene Erscheinungen geben.

Wir betrachten demgemäß die beiden Typen Andalusit und Epidot gesondert.

I. Für den Typus Andalusit ist nach (32):

$$x_o = k \cos^2 \frac{\psi}{2}, \quad x_e = k \sin^2 \frac{\psi}{2},$$

also wird, für die zwei Hauptfälle, dass die Ebene des Polarisators parallel oder normal zur optischen Axenebene ist ($\alpha = 0$ oder $= \pi/2$) aus (37) folgen:

$$(38) \quad J_o = \frac{A^2}{2} \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \cos^2 \frac{\psi}{2}} + \cos^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right),$$

in der Richtung der optischen Axe aber, falls man k und L hinreichend gross nimmt, um e^{-2kl} neben 1 vernachlässigen:

$$(38_a) \quad J'_o = \frac{A^2}{2}.$$

Ferner analog:

$$(39) \quad J_{\pi/2} = \frac{A^2}{2} \left(\cos^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \cos^2 \frac{\psi}{2}} + \sin^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right),$$

$$(39_a) \quad J'_{\pi/2} = 0.$$

II. Für den Typus Epidot ist nach (33):

$$x_o = k \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad x_e = k \cos^2 \frac{\psi}{2},$$

also für dieselben Hauptfälle und unter denselben Voraussetzungen über k und L :

$$(40) \quad J_o = \frac{A^2}{2} \left[\sin^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \sin^2 \frac{\psi}{2}} + \cos^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \cos^2 \frac{\psi}{2}} \right],$$

$$(40_a) \quad J'_o = 0,$$

$$(41) \quad J_{\pi/2} = \frac{A^2}{2} \left[\cos^2 \frac{\psi}{2} e^{-21_0 k \sin^2 \frac{\psi}{2}} + \sin^2 \frac{\psi}{2} e^{-21_0 k \cos^2 \frac{\psi}{2}} \right],$$

$$(41_a) \quad J'_{\pi/2} = \frac{A^2}{2}.$$

Die Vergleichung dieser Formelsysteme (38) — (41) zeigt das weitere durch die Beobachtung bestätigte Resultat:

Die Krystalle, deren Absorption dem Typus Epidot entspricht, verhalten sich, wenn ihre optische Axenebene parallel der Schwingungsebene des Polarisators ist, ebenso, wie die des Typus Andalusit bei gekreuzten Ebenen und umgekehrt.¹⁾

Die beiden Grunderscheinungen selbst wollen wir aus (38) und (39) erschliessen.

Da e^{-ik} neben 1 vernachlässigt wird, so wird für Werthe von ψ nahe gleich 0 die erste Exponentialgrösse zu vernachlässigen sein, für Werthe nahe π die zweite. Für mittlere Werthe werden beide sehr kleine nahe gleiche Werthe besitzen.

Im Falle der Gleichung (38), wo also $\alpha = 0$ ist, nehmen die Factoren der Exponentialgrössen zugleich mit diesen selbst den grössten und kleinsten Werth an, man erhält also einen dunkeln Büschel normal zur Ebene der optischen Axen ($\psi = \pi/2$) und ein helles Feld ihr parallel, welches sich auch durch das Bild der optischen Axe hin fortsetzt.

Im Falle der Gleichung (39), entsprechend $\alpha = \pi/2$, nehmen die Factoren der Exponentialgrössen aber ihr Maximum in denjenigen Richtungen an, wo diese ihr Minimum haben, und umgekehrt; beide wirken sich also entgegen. Infolge dessen wird man mässig dunkle Büschel sowohl normal als parallel zur Ebene der optischen Axen wahrnehmen; das Bild der optischen Axe selbst ist dunkel.

Die erste Erscheinung entspricht ungefähr der im Polarisationsapparat bei gekreuzten Schwingungsebenen erhaltenen, wenn der Krystall in der Diagonallage liegt, die letztere, wenn er in der Normallage liegt. Aber während bei gekreuzten Schwingungsebenen jedes der beiden Bilder bei einer Drehung des Krystalles um 360° viermal auftritt,

1) A. Bertin, Ann. de chim. et de phys. (5) 15. p. 396. 1878.

zeigt es sich bei parallelen Schwingungsebenen oder nach Entfernung des einen polarisirenden Theiles nur zweimal. Auch dies bestätigt das Experiment vollkommen. —

Beobachtet man endlich die Krystallplatten ganz ohne Polarisationsapparat, so gilt die Formel, welche aus (37) durch Bildung des Mittelwerthes für alle α hervorgeht:

$$(42) \quad J = \frac{A^2}{4} (e^{-2u_0 l_0} + e^{-2u_1 l_0})$$

und falls die eine der beiden in der Richtung der optischen Axen fortgepflanzten Wellen stark, die andere nur unmerklich absorbirt wird, für jene Richtung:

$$(42_a) \quad J' = \frac{A^2}{4}.$$

Diese Formeln geben für alle Gattungen ungleich absorbirender Krystalle dunkle Büschel normal zur Ebene der optischen Axen mit hellen Axenbildern, wie sie bereits von Brewster¹⁾ beobachtet sind und beim Andalusit, Epidot u. a. leicht wahrgenommen werden können, wenn man durch eine geeignet geschnittene Platte nach dem hellen Himmel blickt.

Was die schwachen Ringe anbetrifft, welche man nach Beobachtungen von Bertin²⁾ und anderen um die Richtung der optischen Axen mitunter wahrnehmen kann, auch wenn man durchaus mit natürlichem Lichte arbeitet, so ist ohne weiteres klar, dass sie kein reines Absorptionsphänomen sein können, sondern auf Interferenz beruhen. Dazu ist nöthig, dass auf irgend eine Weise die beiden, den Krystall in derselben Richtung durchlaufenden, senkrecht zu einander polarisirten Wellen aus ursprünglich polarisirtem Lichte entstanden sind und zuletzt auf eine gemeinsame Polarisationsebene zurückgeführt werden, denn bekanntlich kommt unter anderen Umständen keine Interferenz zu Stande. Hr. Mallard³⁾ legt, um dies zu erklären, der Oberflächenschicht der Krystallplatte eine polarisirende Wirkung bei, aber eine solche ist direct nicht nachgewiesen, und daher würde ihre Annahme die Schwierigkeit nicht lösen, sondern

1) Brewster, Phil. Trans. 1. p. 11. 1819.

2) Bertin, l. e. p. 412.

3) S. Mallard, Zeitschr. f. Kryst. 3. p. 646. 1879.

nur verlegen: es wäre dann eben diese polarisirende Wirkung zu erklären.

In vielen Fällen dürfte sich die Erscheinung durch die infolge mehrfacher innerer Reflexion die Platten öfter als einmal durchsetzenden Wellen in folgender Weise erklären.

Da bei jedem Durchgang durch Absorption, und bei jeder Reflexion durch Theilung der Welle eine neue Schwächung eintritt, so genügt es, die Wellen zu betrachten, die nur dreimal die Platte passirt haben, also nächst der direct durchgegangenen die grösste Intensität haben.

Von der direct durchgegangenen ordinären Welle (o), welche ich zunächst betrachte, röhren in dem im Innern im allgemeinen schief reflectirten Licht zwei nahe senkrecht zu einander polarisirte Wellen her, die ich (oo) und (oe) nenne. Sie gewinnen auf dem Rückweg zur ersten Grenze einen Gangunterschied, entsprechend ihrer verschiedenen Geschwindigkeit. Dort werden sie abermals reflectirt und geben vier Componenten nach zwei nahe zu einander senkrechten Polarisationsrichtungen: (ooo), (ooo), (oeo), (oeo). Die erste und dritte, die zweite und vierte, als parallel schwingend, vermögen zu interferiren und geben also zwei senkrechte Componenten:

$$[(ooo) + (oeo)] \text{ und } [(ooo) + (oeo)].$$

Von der direct durchgehenden extraordinären Welle (e) röhren ähnlich zwei Componenten her: (eoo) + (eoo) und (eoe) + (eee); es treten also im ganzen vier Wellen aus.

Im convergenten Licht würde, weil jede dieser Wellen aus zwei Theilen mit einem von der Neigung abhängigen Gangunterschied besteht, jede ein Ringsystem um die optische Axe geben, und zwar die erste und vierte Welle eines, wie es im Polarisationsapparat bei parallelen Nicols, die zweite und dritte eines, wie es bei gekreuzten erhalten werden würde. Absorbirt der Krystall nicht oder doch gleichmässig, so werden sich beide Arten gegenseitig zerstören, auch wenn man einen Polarisator anwendet; absorbirt aber der Krystall ungleich, so werden die verschiedenen Wellen verschiedene Stärke haben und sich demnach nicht völlig neutralisiren,

sondern es wird ein schwaches Ringsystem nach Art des bei parallelen Nicols im Polarisationsapparat auftretenden übrig bleiben, und zwar auch mit jenem gleiche Distanz der Ringe zeigen. Ich habe die Erscheinung nie gesehen, aber nach der Beschreibung Hrn. Bertin's¹⁾ möchte ich glauben, dass die vorstehende Erklärung in den von ihm beobachteten Fällen der Wirklichkeit entspricht. Die Epidotkrystalle, an welchen ich durch die Freundlichkeit Hrn. Prof. C. Klein's die oben entwickelte Theorie der Büschel prüfen konnte, zeigen im natürlichen Licht keine Spur von Ringen, sondern nur wenn ein Polarisator benutzt wird, z. B. wenn man vom Polarisationsapparat den oberen Nicol entfernt. Aber diese Ringe haben bedeutend grössere Abstände als die, welche man nach Anbringung des oberen Nicols wahrnimmt, sie können also nicht durch Interferenz zweier Wellen, die während des Passirens der ganzen Plattendicke verschiedene Geschwindigkeit hatten, hervorgebracht werden. Es erscheint daher wahrscheinlich, dass eine Zwillingslamelle, wie sie Hr. Klein früher schon zur Erklärung angenommen hat, in diesem Falle die Erscheinung verursacht. Diese Annahme wird durch die Beobachtung bestätigt, dass die Präparate die Ringe nur an einzelnen Stellen zeigen.

Ausser diesen Erscheinungen in der Nähe der optischen Axen können noch besondere Folgen der Absorption in der Richtung der Absorptionsachsen, welche beim rhombischen System den Elasticitätsachsen parallel sind, merklich werden, da der Absorptionsindex α in denselben seinen grössten und kleinsten Werth annimmt. In der That sind in diesen Richtungen helle und dunkle Flecken bemerkt worden.²⁾

Die aus dem Vorstehenden sich ergebende vollständige Uebereinstimmung der theoretischen Resultate mit den Beobachtungen für pleochroitische Krystalle rechtfertigt vielleicht eine kurze Zusammenstellung der Grundlagen der Theorie.

1) A. Bertin, l. c. p. 415.

2) Vgl. A. Bertin, l. c. p. 400.

Ihre eigentlichen Wurzeln sind folgende zwei Hypothesen:

1. Die Medien, die wir als vollkommen durchsichtig bezeichnen, weil sie die Energie periodischer Aetherschwingungen nicht merklich vermindern, verhalten sich ebenso nicht periodischen Aetherbewegungen gegenüber.

2. Die Medien, welche die Energie periodischer Aetherschwingungen durch Absorption vermindern, verhalten sich ebenso nicht periodischen Aetherbewegungen gegenüber.

Aus diesen Hypothesen folgt dann mit Strenge, dass die auf den Aether wirkenden Kräfte nur zwei Hauptgattungen angehören können, entweder:

1. Energie-erhaltende sein müssen, die eine Arbeit liefern, welche der Differentialquotient nach der Zeit sein muss von einer nur durch den augenblicklichen Zustand des Systems bestimmten Function, oder:

2. Energie-vermindernde, welche eine Arbeit liefern, welche eine negative Summe von quadratischen Gliedern darstellt.

Nimmt man hinzu die auf der Beobachtung ruhende Hülfsannahme, dass die Kräfte lineare Functionen der Verschiebungen und ihrer Differentialquotienten sein müssen, so ergeben sich abermals mit Strenge

acht Gattungen Kräfte der ersten,
zwei Gattungen Kräfte der zweiten

Art als möglich, deren unbekannte Coefficienten bei periodischen Bewegungen als Functionen der Schwingungsdauer zuzulassen sind. Diese Anzahl reducirt sich auf die Hälfte, wenn man verlangt, dass beim Uebergang durch die Grenze zweier Medien die Normalcomponente der Verschiebung beiderseitig streng gleich sein soll. Es scheint nicht, dass eine solche Verfügung beschränkend wirkt, und sie ist demnach von mir vielfach benutzt worden.

Ueber die Natur des Aethers sind drei Annahmen gemacht:

- 1) dass derselbe als incompressibel,
- 2) als in allen Körpern gleichartig,

3) als von einer verschwindenden Dichte gegenüber denjenigen der ponderablen Körper zu betrachten sei.

Die letztere führt darauf, dass die ponderablen Moleküle als ruhend einzuführen sind, was ich durch eine besondere Betrachtung noch ausführlicher begründet habe.¹⁾

Als Bedingungen für den Uebergang des Lichtes zwischen zwei Medien sind die Gleichungen der Continuität und das Princip der Erhaltung der Energie in der Form, welche ich als Kirchhoff'sches Princip bezeichnet habe, benutzt.

Die Folgerungen aus diesen Grundlagen sind durch Vergleichungen mit den Beobachtungen der verschiedensten Art bestätigt worden.

In der That sind auch die Grundlagen so allgemein, dass man sie kaum wesentlich abändern kann, ohne die Vorstellung der Aetherschwingungen selbst aufzugeben. Damit hängt umgekehrt zusammen, dass die theoretisch möglichen Erscheinungen die beobachteten als specielle Fälle enthalten, zu welchen man durch willkürliche Verfügung über die durch die Theorie unbestimmt gebliebenen Constanten hinabsteigt. Eine Beseitigung dieser Willkür durch Aufsuchung einer Vorstellung, welche die der Beobachtung entsprechenden Verfüungen physikalisch nothwendig erscheinen lässt, würde in einer Hinsicht eine Vervollkommnung der Theorie bedeuten; andererseits freilich würde sie durch die dazu nöthige Specialisirung und Ausbildung der Hypothesen die Sicherheit des Untergrundes beeinträchtigen.

Göttingen, Juli 1884.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 554. 1884.

V. Eine neue Methode zur Bestimmung der Spannkraft des Wasserdampfes in wasserhaltigen Salzen; von W. Müller-Erzbach.

Nach den Versuchen von Hrn. A. Naumann¹⁾ lässt ein Krystall von Kupfervitriol, längere Zeit bei möglichst unveränderter Temperatur in Torricelli's Vacuum erwärmt, die constante Höhe der Quecksilbersäule nicht erkennen, welche nach früheren Versuchen angenommen wurde. Auch fand Hr. Kraut²⁾ beim Gyps eine ähnliche Unbeständigkeit in der Spannung des aus der Verbindung austretenden Wasserdampfes, und sie ist nach der Anordnung jener Versuche erklärlich, da die Wiederaufnahme des durch zu starkes Erwärmen oder auf andere Weise frei gewordenen und dann bei überschüssiger Spannung vorhandenen Wasserdampfes nur langsam oder gar nicht erfolgt. Die Salze verhalten sich in dieser Beziehung sehr verschieden. Phosphorsaures Natron, welches bei gewöhnlicher Temperatur zum grössten Theile entwässert war, nahm das verlorene Wasser aus gleichmässig feucht gehaltener Luft mit constanter und ziemlich beträchtlicher Lebhaftigkeit auf, ganz entwässerter Kupfervitriol mit noch gröserer Lebhaftigkeit, dagegen betrug bei schwefelsaurem Natron, welches ebenfalls bei gewöhnlicher Lufttemperatur sein Krystallwasser verloren hatte, die Gewichtszunahme nur ungefähr ein Fünftel von der des phosphorsauren Natrons, wenn es in derselben Weise wie die anderen Salze mit feuchter Luft in Verbindung stand. Und doch war von dem schwefelsauren Natron gegen das phosphorsaure die dreifache Gewichtsmenge für diesen Versuch verwandt.

Deshalb wird beim Erhitzen in der Barometerröhre nicht nur die Spannkraft des in dem Salze gebundenen Wassers gemessen, sondern das Quecksilber wird gleichzeitig durch einen nach der Dauer des Versuches wie nach der

1) A. Naumann, Chem. Ber. 1874. p. 1573.

2) Kraut, Ann. d. Chem. u. Pharm. 178. p. 129. 1875.

Art des Salzes wechselnden Betrag an schon ausgeschiedenem überschüssigem Wasserdampf herabgedrückt. Meine auf die Beseitigung dieses hinderlichen Wasserdampfes gerichteten Bemühungen waren schliesslich von Erfolg und führten auf eine Anordnung des Versuches, durch welche nach zahlreichen Beobachtungen bei einer stets über mehrere Tage sich erstreckenden Versuchsdauer untereinander hinreichend und zum Theil recht gut übereinstimmende Resultate erhalten wurden.

Die Menge des aus einer Glasmöhre von bestimmter Länge und ebenfalls unveränderlichem Querschnitt verdunstenden Wassers ist nach Dalton proportional der Differenz der durch die Temperatur der Flüssigkeit bedingten Spannung und der Spannung des schon vorhandenen Dampfes, ausserdem ist sie dem Gesamtdruck umgekehrt proportional. Diese am Psychrometer zur Anwendung kommende Regel erweist sich nach Stefan's¹⁾ Versuchen über Aetherverdampfung bei stärkeren Spannungen desselben nicht mehr zutreffend, und Hr. Stefan findet statt dessen die Verdampfungsgeschwindigkeit proportional dem Logarithmus eines Bruches, dessen Zähler der Luftdruck und dessen Nenner der um die Dampfspannung verminderte Luftdruck ist. Handelt es sich aber um kleine Spannungen im Verhältnisse zum Luftdruck, so bleibt die Proportionalität zwischen Spannung und Geschwindigkeit der Verdunstung fast vollständig. Wechselt z. B. bei einem Luftdruck von 760 mm die Dampfspannung von 10 bis 60 mm, während der Gegendruck der vorhandenen Feuchtigkeit Null ist, so gibt Stefan's Formel das Verhältniss 1:6,2 der verdunstenden Wassermengen, und nach Dalton findet man es wenig abweichend 1:6, für geringere Spannungen ist sogar die Uebereinstimmung noch vollständiger. Bei dem Verdunsten des Wassers erschwert der wechselnde Feuchtigkeitsgehalt der Luft die genaue Beobachtung des Vorganges, da aber nach eigenen früheren Versuchen²⁾ die Spannung des Was-

1) Stefan, Wien. Ber. 68. p. 385. 1873.

2) Müller-Erzbach, Carl's Rep. 17. p. 652. 1881.

serdampfes in der Luft durch concentrirte Schwefelsäure leicht annähernd auf Null gebracht wird, so liess die Verdampfung innerhalb der Luft von abgeschlossenen Glasflaschen, deren Boden mit Schwefelsäure bedeckt war, eine grössere Regelmässigkeit erwarten. An einer Seite zugeschmolzene und theilweise mit Wasser gefüllte Glasröhren sind in solchen Flaschen andauernd von trockener Luft umgeben und liessen tatsächlich unter gleichen Umständen gleiche Gewichtsmengen Wasser an die Schwefelsäure übergehen. Die Mengen sind direct proportional dem Querschnitt der Röhren, umgekehrt proportional ihrer Länge und direct proportional der durch die Temperatur gegebenen Spannung des Wasserdampfes. So verlor eine Glasröhre von 7 mm Durchmesser bei 90 mm Entfernung der Wasseroberfläche von der Oeffnung in 24 Stunden 13 mg Wasser bei einer Durchschnittstemperatur von $16\frac{1}{2}$ und 20 mg bei 23° Wärme, während nach dem Verhältnisse der Dampfspannungen im letzteren Falle eine Gewichtsabnahme von $19\frac{1}{2}$ mg erwartet werden musste. Eine kürzere Röhre von 65 mm Länge und gleichem Durchmesser verlor bei $16\frac{1}{2}^{\circ}$ 17 mg und bei 18° $19\frac{1}{2}$ mg statt der berechneten $18\frac{3}{4}$, bei $22\frac{3}{4}^{\circ}$ $22\frac{3}{4}$ mg statt $23\frac{9}{10}$. Die so hervortretenden Abweichungen sind unzweifelhaft auf Rechnung von Temperaturschwankungen und der wegen der fehlenden Data für die Nacht gar nicht berücksichtigten Veränderungen im Luftdruck zu setzen. Bei 59° aber verlor die Röhre nur 13 mm in zwei Stunden, während die Berechnung einen Verlust von 14 mg forderte, ebenso bei 64° 14 mg, statt der berechneten 18, und in diesen Fällen nehme ich an, dass die durch die grössere Wärme bewirkte schnellere Verdampfung ein hinreichend vollständiges Austrocknen der Luft durch die Schwefelsäure unmöglich macht. Für Beobachtungen bei gewöhnlicher Lufttemperatur dagegen können nach den gefundenen Zahlen ausreichend constante Werthe ermittelt werden. Ich werde sie für bestimmte Fälle noch genauer angeben, sobald es mir möglich ist, durch Registririnstrumente den Verlauf der Temperatur und des Luftdruckes zu bestimmen. **Die Abhängigkeit der Verdampfungsmenge des**

Wassers von dem Querschnitt und der Länge der Röhre fand ich übereinstimmend mit den Beobachtungen Stefan's beim Verdampfen des Aethers, und es ist deshalb überflüssig, einzelne Beobachtungsresultate darüber hinzuzufügen. Der Durchmesser der von mir benutzten Glasröhren wechselte von 7 bis zu 11 mm, ihre Länge, d. h. der Abstand der Oeffnung von der Oberfläche des verdampfenden Wassers, von 55 bis 90 mm. Damit der Abstand, namentlich auch bei den späteren Versuchen mit Salzen, möglichst unverändert gehalten würde, waren die Glasröhren an der geschlossenen Seite kugelförmig aufgeblasen. Dadurch wird zugleich dafür gesorgt, dass stets genug Wasserdampf für die Diffusion durch die Luft der Glasröhre vorhanden ist.

Da die Dissociationsspannung der wasserhaltigen Salze geringer ist als die Tension des freien Wassers, so liess sich mit Wahrscheinlichkeit erwarten, dass solche Salze entsprechend geringere Mengen von Wasser an die Schwefelsäure abgeben würden, nur war es fraglich, ob die Entbindung dieses Wasserdampfes ebenso gleichmässig erfolgte, als es aus unverbundenem Wasser geschieht. Vielfache Erfahrungen haben mich nun überzeugt, dass jedenfalls bei einer überwiegend grossen Zahl von Salzen jene Regelmässigkeit stattfindet. Die Verschiedenheit im Verhalten verschiedener Salze sowie desselben Salzes für die verschiedenen gebundenen Wassermoleküle wurde dabei so gross gefunden, dass selbst ohne Berücksichtigung der nach ihrem Einfluss auf die Dissociation allgemein nicht geprüften Luftdrucksänderungen wichtige Resultate über die Constitution der Salze aus meinen Beobachtungen abgeleitet werden konnten. Wo diese Ableitung zweifelhaft bleibt, da beabsichtige ich, später mit Benutzung von Registrirapparaten ergänzende Versuche hinzuzufügen.

Die Ausführung der einzelnen Beobachtungen, wie sie sich schliesslich am zweckmässigsten erwies, geschah einfach so, dass zwei der beschriebenen Glasröhren von möglichst gleichem Querschnitt und gleicher Länge innerhalb einer geräumigen und durch einen mit Fett bestrichenen Glasstöpsel verschliessbaren Glasflasche in concentrirte Schwefelsäure gestellt wurden. Die eine der Glasröhren enthielt in

der kugelförmigen Erweiterung etwas reines Wasser, die andere das zu untersuchende Salz, und es wurden mit passenden Zwischenzeiten — meist nach 24 oder mehr Stunden — die Gewichtsverluste bestimmt. Aus dem Verhältnisse der Gewichtsabnahmen findet man die relative und daraus wieder nach den bekannten Zahlen für reines Wasser die absoluten Dampfspannungen. Weil die Temperaturen von Wasser und Salz nach dieser Anordnung stets genau übereinstimmen, so erhält man auch das Verhältniss ihrer Spannungen genau, aber die während der Versuche herrschende mittlere Temperatur konnte aus einer Anzahl einzelner Notirungen nur annähernd angegeben werden.

Bei allen von mir dahin geprüften Salzen, dem kohlen-sauren, schwefelsauren und borsauren Natron, den Sulfaten des Magnesiums, Zinks und Kupfers wurde bei höherer Temperatur eine höhere relative Dampfspannung beobachtet. An phosphorsaurem Natron hat H. Debray¹⁾ früher dasselbe Verhalten bemerkt, und ich fand ebenso seiner weiteren und Hrn. G. Wiedemann's Angabe entsprechend, dass beim Schmelzpunkte der Salze die relative Spannung keine besondere Steigerung erfährt, sondern dass sie wie bei anderen Temperaturgraden mit der Zunahme der Wärme stetig wächst. Ist die Erscheinung des stärkeren Anwachsens der relativen Dampfspannung in den Salzen allgemein, wie ich annehmen muss, so würde das Verhältniss der Spannungen von gebundenem und nicht gebundenem Wasser um so mehr der Einheit sich nähern, je höher die Versuchstemperatur liegt, sodass das gebundene Wasser mit steigender Temperatur mehr und mehr die Eigenschaft des nicht gebundenen erhält. Nach allgemeiner Annahme nimmt aber in derselben Weise die chemische Verwandtschaft des gebundenen Wassers mit der Erhöhung der Temperatur ab, und man kann deshalb in der Differenz von Eins und der relativen Dampfspannung eines wasserhaltigen Salzes einen Maassstab finden für die Veränderung der einen Componente der Verbindung oder für die Grösse der auf sie ausgeübten Anziehung. Bei

1) Debray, Compt. rend. 66. p. 194. 1868.

der relativen Spannung Eins ist die Verwandtschaft Null, je kleiner dagegen der Bruch ist, welchen sie ausmacht, um so mehr weicht das Verhalten des gebundenen Wassers von dem des freien ab, sodass dasselbe jenen Differenzen entsprechend erscheint. Bezeichnet man die Spannungen des freien und des gebundenen Wassers mit S_1 und S_2 , so ist S_2/S_1 die relative Spannung, und $1 - (S_2/S_1)$ oder $(S_1 - S_2)/S_1$ ergibt sich dann als der Werth, welcher zur Unterscheidung stärkerer und schwächerer Verwandtschaft benutzt werden kann.

Dass man die Unterschiede in der Spannung des gebundenen und des freien Wassers bei verschiedenen Temperaturen für sich nicht direct vergleichen kann, ist durch die Veränderlichkeit in der Spannung des freien Wassers bedingt und bereits früher von Hrn. G. Wiedemann¹⁾ hervorgehoben. Der Quotient $(S_1 - S_2)/S_1$ ist von der mit der Temperatur veränderlichen Grösse S_1 abhängig, was nicht übersehen werden darf, aber er bestimmt für jede neue Temperatur aus demselben Principe die Eigenschaften des in der Verbindung stehenden Wassers nach den unter gleichen Umständen beobachteten Eigenschaften des unverbundenen Wassers. Die chemische Anziehung wird deshalb gerade dadurch unmittelbarer und vollständiger erkannt, als wenn man blosse Druckunterschiede, die unter verschiedenen Verhältnissen stattfinden, ohne weiteres zusammenstellen wollte, und ich bin bei einer grösseren Zahl von mir geprüfter Einzelfälle zu Resultaten geführt, die unter sich und mit den Ergebnissen älterer Untersuchungen gut übereinstimmen. Daher erschien mir die relative Dampfspannung ein geeignetes Mittel zu sein, um die Festigkeit der Moleculverbindungen vom Wasser zu bestimmen, und namentlich suchte ich festzustellen, ob die so ermittelte Festigkeit zu der Contraction bei der Bildung der Verbindungen oder nach bekannter Auffassung zu der Beschränkung der molecularen Bewegungen in einfacher Beziehung steht.

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 474. 1874.

Dass die Dampfspannung hauptsächlich durch die chemische Anziehung bedingt ist und nicht etwa durch besondere physikalische Eigenschaften, wie Porosität oder Adhäsion der Oberfläche, erscheint neben ihrer geringen Abhängigkeit von dem Grade der Zertheilung durch Pulverisiren namentlich durch den bereits erwähnten Umstand angezeigt, dass beim Durchgang durch den Schmelzpunkt die Verdampfung nur stetig forschreitet, während doch die physikalische Beschaffenheit der Oberfläche dabei vollständig verändert wird. Ausserdem ist es mir noch gelungen, die Berechtigung zur Beurtheilung chemischer Verwandtschaft nach der Dampfspannung durch einige Versuche bei der Bildung der wasserhaltigen Verbindungen direct zu beweisen. Nach der Formel $(S_1 - S_2)/S_1$ findet man für Kupfervitriol mit $2\frac{1}{5}$ bis 5 Mol. Wasser die Zahl 0,97, für phosphorsaures Natron mit 8—12 Mol. Wasser 0,83, für dasselbe mit 3—7 Mol. Wasser 0,58, für kohlensaures Natron von 2—10 Mol. Wasser 0,33 und für wasserfreies schwefelsaures Natron bis zur Sättigung 0,22. Nun hielt ich es bei der grossen Regelmässigkeit, welche die wasserhaltigen Salze in der Dissociationsspannung zeigen, für möglich, dass auch die entwässerten und fein zertheilten Salze umgekehrt in einer Atmosphäre von unveränderlichem Feuchtigkeitsgehalt nach Maassgabe ihrer relativen Dampfspannung in gleichen Zeitschnitten ungleiche Mengen von Wasserdampf aufnehmen würden. Und der Versuch entsprach meiner Vermuthung so vollständig, wie ich es nur erwarten konnte. In eine theilweise mit Wasser gefüllte und oben mit Papier bedeckte Flasche brachte ich 7 mm weite und 6 cm lange Glasröhren, welche an einer Seite geschlossen waren und die eben genannten Salze enthielten. Letztere waren auf diese Weise mit gleichmässig feuchter und nahezu wassergesättigter Luft in Berührung, sie wurden in denselben Zwischenzeiten immer zugleich gewogen und zeigten folgende schon vorher erwähnte Gewichtszunahme.

Art des Salzes	Ge- wichts- menge	Zur Kry- stallbildung erforderl. Wasser- menge	Gewichtszunahme in Milligrammen nach				$(S_1 - S_0)/S_0$ f. gewöhnl. Temp.
			23	+ 25	+ 25	+ 48 std.	
$\text{CuSO}_4 + 2\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$	0,112 g	0,023 g	10	+ 11	+ 2	+ 0	0,97
$\text{Na}_2\text{HPO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,143	0,144	8	+ 8,5	+ 9,5	+ 17	0,58 u. 0,33
$\text{Na}_2\text{CO}_3 + 1\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$	0,077	0,092	5	+ 7	+ 6	+ 11	0,33
Na_2SO_4 bei ge- wöhnl. Temp. entwässert . .	0,282	0,356	2	+ 2	+ 1	+ 3	0,22

Demnach nehmen alle vier Salze genau in derselben Abstufung das Wasser aus der feuchten Luft auf, wie ihre Anziehung zu demselben aus der Dissociationsspannung berechnet war. Die Menge des in den Röhren vorhandenen Salzes war ohne Einfluss, solange noch hinreichend von dem nicht gesättigten Salze vorhanden war. Kupfervitriol nahm genau fünf Moleküle Wasser auf, nachher hatte sich in 48 Stunden die vorher stets trockene Innenwand der umschliessenden Röhre von einer Stelle mit eben sichtbarem Thau bedeckt, aber die Gewichtszunahme betrug in diesen zwei Tagen nicht 1 mg. Derselbe Kupfervitriol zog ganz entwässert das erste Wasser noch schneller an, sein Gewicht von 0,087 g vergrösserte sich nämlich in 22 Stunden um 13 mg. Das schwefelsaure Natron, welches in der grössten Menge vorhanden war, entzog der Luft am wenigsten Wasser, aber doch wieder regelmässig soviel, dass der aussen an der Röhre stets vorhandene Thau innerhalb der Röhre nicht sichtbar wurde. Eine besondere Beachtung verdient noch das phosphorsaure Natron. Dasselbe konnte sich je nach der Geschwindigkeit der molecularen Wasservertheilung entweder zunächst nur in Salz mit sieben Molekülen Wasser verwandeln, oder es konnte auch theilweise alle zwölf Moleküle Wasser binden, in beiden Fällen musste man eine zwischen der des Kupfervitriols und des kohlensauren Natrons stehende Gewichtszunahme erwarten, wie sie auch wirklich gefunden wurde. Dagegen erschien die ausschliessliche Bildung des Salzes mit zwölf Molekülen Wasser ausgeschlossen, weil dasselbe durch die Berührung mit dem wasserärmeren zerlegt

werden musste. Dass sie in der That nicht erfolgte, ging schon aus der im Vergleich zum kohlensauren Natron bedeutend schnelleren Wasseraufnahme hervor, und ebenso liess sich unmittelbar nachweisen, dass nicht anfangs ausschliesslich Salz mit sieben Molekülen Wasser gebildet wird, denn als diese sieben Moleküle dem Gewichte nach noch nicht aufgenommen waren, zeigte das Salz bereits eine relative Spannung von 0,56, die zwischen den Spannungen des Salzes mit über sieben Mol. Wasser von 0,67 und unter sieben Mol. Wasser von 0,41 liegt. Durch die Beobachtung der Dampfspannungen ist demnach ein vielfach anwendbares Mittel für die Beurtheilung der Constitution der Salze geboten, und für die Folgerungen über die chemische Verwandtschaft erscheint es mir besonders wichtig, dass dieselben mit übereinstimmendem Resultate aus der Dampfspannung bei der Zersetzung wie aus der Dampfverdichtung bei der Bildung der wasserhaltigen Salze abgeleitet werden konnten.

Bei der Reihenfolge der Versuche habe ich die geprüften Salze nach der Zahl der gebundenen Wassermoleküle geordnet, und ich will diese Folge bei der Mittheilung der Versuchsergebnisse festhalten. Berechnet man nämlich aus dem Volumen des wasserhaltigen und dem des wasserfreien Salzes das Molecularvolumen des gebundenen Wassers, so ist es zunächst am meisten wahrscheinlich, dass bei zwei Salzen mit einer beiderseits grösseren Zahl von Wassermolekülen das Molecularvolumen des gebundenen Wassers gleichartiger ausfällt, als wenn man ein wasserärmeres Salz mit einem viel wasserreicherem vergleicht. Im letzteren Falle sind beide Componenten der Verbindung, Wasser und wasserfreies Salz, ganz voneinander verschieden, während im ersten wenigstens die Wassermengen unter sich ganz oder annähernd übereinstimmen. Zeigt sich dann unter solchen Umständen grösserer Gleichheit in der Zusammensetzung ein bedeutender Unterschied im Wasservolumen oder in der Contraction bei der Bildung der Salze, so nehme ich eine grössere Anziehung zum Wasser als Ursache davon an, und es hat sich noch bisher in allen Fällen correspondirend die Dampf-

spannung des gebundenen Wassers als eine geringere erwiesen.

1. **Phosphorsaures Natron.** $\text{Na}_2\text{HPO}_4 + 12\text{H}_2\text{O}$.

Das zu den Versuchen benutzte Salz war aus käuflichem durch Umkristallisiren hergestellt und enthielt das nach der Formel berechnete Wasser nach einer speciellen Probe bis auf $1/93$, welches fehlte. Ob das Salz in grösseren Stücken oder fein zerrieben zur Verwendung kam, machte keinen merklichen Unterschied aus, während in anderen Fällen, z. B. beim borsauren Natron, die Zersetzung grösserer Stücke anscheinend mehr Widerstand bot und unregelmässiger verlief. Von zwei fast genau übereinstimmenden Versuchsreihen genügt es, eine, in welcher die Spannungsänderungen nach den dazu zufälligen Beobachtungszeiten am deutlichsten sichtbar sind, vollständiger anzuführen.

Gewicht des Salzes	Durchschn. Temperatur (aunähernd)	V_1 Ge-wichtsverl. des Salzes	V_2 Ge-wichts-verl. d. Was-sers in der gleich. Röhre	Versuchs-dauer	Relative Spannung V_1/V_2
0,265 g	17° C.	12 mg	18 mg	22 1/3 St.	0,67
—	17 2/3	14	20	26	0,70
—	18 1/3	40	60 1/3	72	0,67
—	20 1/3	9 1/3	24 1/2	26	0,39
—	19	15	36	41 1/3	0,42
—	17 1/3	8 1/3	20	24	0,42
—	17	21	51	70 1/3	0,41
—	18	12	105	119	0,11
—	19	1 1/2	93	4 Tage	0,016
—	18	4 1/3	126	6	0,036
—	16 1/3	5	90	5	0,051
—	19	10	221	10	0,045
—	17	4	194	9	0,02

Schliesslich waren nur 2 mg vom gesamten Krystallwasser rückständig, und man darf deshalb aus dem bis hierher beobachteten Verlauf des Versuches schon annehmen, dass dasselbe vollständig an die Schwefelsäure übergeht. Mit aller Bestimmtheit ergeben sich und unabhängig vom Luftdruck, wie sich ja auch a priori erwarten liess, dreierlei verschiedene Spannungen, z. B. für 17° 0,67—0,41 und 0,03 bis 0,05. An der ersten Grenze der Spannungsänderung, die durch den

Beobachtungstermin gerade gut getroffen war, sind von 160 mg überhaupt vorhandenen Wassers 66 mg verschwunden oder von 12 Molekülen 4,95, an der zweiten Grenze 9,9 Moleküle von den 12 ursprünglich vorhandenen. Demnach werden durch die Verschiedenheit in der Dissociation drei Verbindungen des phosphorsauren Natrons unterschieden. $\text{Na}_2\text{HPO}_4 + 12\text{H}_2\text{O}$, $\text{Na}_2\text{HPO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$ und $\text{Na}_2\text{HPO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$. Hr. Debray hatte in seiner vorher schon erwähnten Untersuchung ebenfalls nach dem Verlust von 5 Molekülen Wasser eine plötzliche Verminderung der Dampfspannung beobachtet, und so zweierlei verschiedene Salze angenommen, ein drittes hat er nicht genannt. Die ohne Beschreibung der wahrscheinlich principiell gegen früher nicht veränderten Versuchsmethode von Debray für die relative Spannung genannten Zahlen sind nur wenig grösser als die von mir gefundenen, nämlich für das wasserreichere Salz bei 16° 0,72 und für das wasserärmere bei 13° 0,55. Der Mehrbetrag erklärt sich nach meiner Auffassung durch überschüssig vorhandenes freies Wasser, er ist hier nicht bedeutend, weil das Salz verhältnissmässig leicht einen grösseren Ueberschuss wieder aufnimmt. An der Grenze der zweiten und dritten Zersetzungsstufe zeigt sich einzelnen Beobachtungen bei anderen Salzen analog anfangs eine schwächere Dissociation, und es scheint, als ob durch längere Wirkung des Spannungsdruckes, der wegen mangelnder Feuchtigkeit in der Luft ohne Gegendruck ist, die Festigkeit der gebliebenen Moleküle erst gelockert werden müsste, damit nachher ein normales Abströmen des Wasserdampfes durch die Versuchsröhre stattfinden kann.

Es erschien mir von Interesse, und es ist zur Beurtheilung der älteren Versuche von Wichtigkeit, festzustellen, ob die aus den wasserfreien Salzen und aus dem Wasserdampf feuchter Luft gebildeten Salze den gewöhnlichen, aus flüssigem Wasser entstandenen Salzen nach der Dissociation sich gleich constituiert erweisen, und deshalb habe ich vergleichende Versuche darüber angestellt. Phosphorsaures Natron der bezeichneten Darstellung aus Wasserdampf ergab nun bei 22° für die fünf ersten Moleküle 0,73 und für die

fünf folgenden 0,46 als relative Spannung, sodass mit Rücksicht auf die gegen früher etwas höhere Versuchstemperatur für beiderlei Salze eine ganz oder fast gleiche Dissociation angenommen werden muss. Diese Uebereinstimmung ist nach weiteren Versuchen keineswegs bei allen Salzen vorhanden, und ich werde später über die Abweichungen nähere Mittheilungen machen.

2. Schwefelsaures Natron. $\text{Na}_2\text{SO}_4 + 10\text{H}_2\text{O}$.

Gewicht des Salzes	Durchschnittl. Temp.	Gewicht d. Krystallwassers	V_1	Gewichtsverlust des Salzes	V_2	Gewichtsverlust des Wassers	Relative Spannung V_1/V_2
0,160 g	20°	0,089 g	19	mg	24	mg	0,79
	19	—	13		16		0,81
	16 $\frac{1}{2}$	—	23		32		0,72
0,631	20	0,358	14		18		0,78
	18 $\frac{1}{2}$	—	23 $\frac{1}{2}$		33		0,71
	20	—	20		25 $\frac{1}{2}$		0,78
	18	—	24		34		0,74
	16	—	23		—		—
	18 $\frac{1}{2}$	—	94		128		0,73
	16	—	91		130		0,70
	17 $\frac{1}{2}$	—	86		50		0,72
	18 $\frac{1}{2}$ °	—	31		58	mg	0,53
0 in 3 Tagen O beim Erhitzen							

Beim schwefelsauren Natron erhält sich also die anfängliche Dissociationsspannung, bis alles Wasser verschwunden ist, und alle zehn Moleküle Wasser erscheinen gleichartig gebunden, die geringe Abnahme der relativen Spannung gegen das Ende der Versuche auch bei noch hinreichendem Salzvorrathe beruht wahrscheinlich auf der tieferen Lage der zuletzt zersetzenen Salzschichten. Hammerl¹⁾ hat mit meinem Resultate übereinstimmend nur die Verbindung des Natriumsulfats mit zehn Molekülen Wasser constant gefunden und früher angegebene Verbindungen mit geringerem Wassergehalt nach seinen Versuchen für Zusammensetzungen erklärt, die nur im labilen Gleichgewichte stehen. Bei der Erhöhung der Temperatur auf fast 31° fand ich die relative Spannung 0,85, und über dem Schmelzpunkt 33° wurde bald die Spannung des ungebundenen Wassers erreicht. Eine bis 64° erhitze

1) Hammerl, Wien. Ber. S5. p. 1004. 1883.

Probe des Salzes zeigte nachher während 17 stündigen Verdunstens bei $20\frac{1}{2}^{\circ}$ unverändert die relative Spannung 1, ein Beweis, dass in der höheren Temperatur eine Zerlegung des Salzes in theilweise freies Wasser erfolgt war, und dass die Rückbildung desselben so schnell nicht stattfindet.

3. Kohlensaures Natron. $\text{Na}_2\text{CO}_3 + 10\text{H}_2\text{O}$.

Gewicht des Salzes	Durchschnittl. Temp.	Gewicht d. Krystallwassers	V_1	Gewichtsverlust des Salzes	V_2	Gewichtsverlust des Wassers	Relative Spannung V_1/V_2
0,167 g	—	0,105 g		0,095 g (in zugeschmolzenen Röhre)		—	—
79	0,152	18°	0,096	10 mg	16 mg	0,63	
31	—	31	—	10	18	0,77	
72	(erhitzt)	17	—	22	34	0,64	
78	—	20	—	17	19 $\frac{1}{2}$	0,87	
71	(nach dem Erhitzen bis 43°)	—	—	—	—	—	
78	0,454	17 $\frac{1}{2}$	0,286	13	283	19 $\frac{1}{3}$	0,67
74	—	20	—	17	25 $\frac{1}{2}$	0,67	
73	—	20	—	23 $\frac{1}{2}$	35	0,67	
70	—	18 $\frac{1}{2}$	—	39 $\frac{1}{2}$	62	0,64	
72	—	18 $\frac{1}{2}$	—	9	—	—	
53	—	18 $\frac{1}{2}$	—	84	254	187	0,61
		16 $\frac{1}{2}$ °	—	41 mg in 5 Tagen	72	—	0,57

Es bleibt stets ein Salz mit einem Molekul Wasser zurück, das in fünf Tagen keine wägbare Menge Wasser verlor, und dessen Dissociationsspannung nachher bei 21° auf 0,011, später bei 20° auf 0,008 und dann bei 18° bis zum Verlauf des letzten Wassers auf 0,009 festgestellt wurde. Bei gleichbleibender Spannung verliert demnach das Salz älteren Angaben entgegen schliesslich alles Wasser. Nach dem Erhitzen bis 31° zeigte das ursprüngliche Salz später bei gewöhnlicher Temperatur die gewöhnliche Spannung, aber nach dem Erhitzen bis 43° war es wenigstens theilweise umgesetzt und liess abgekühlt mehr Wasser verdunsten als vorher. In zugeschmolzenen Röhren, welche auf der einen Seite das pulverisierte kohlensaure Natron und auf der anderen absorbirendes entwässertes Kali enthalten, lässt sich der Vorgang der Wasserübertragung in ganz interessanter Weise verfolgen. Hängt man dieselben nämlich an zwei Fäden auf,

von denen der eine an einem der Wagebalken und der andere ausserhalb der Wage befestigt ist, so kann man an dem regelmässig oder nicht regelmässig veränderten Gewichte jenes Wagebalkens die Lebhaftigkeit des Uebertretens vom Wasser von der einen Seite der Röhre auf die andere genau bestimmen.

Die Dissociationsspannung wird nur, wie für das schwefelsaure Natron schon hervorgehoben wurde, wegen der zunehmenden Entfernung der sich zersetzenden Schichten und vielleicht wegen der Behinderung der Diffusion durch die obersten schon zersetzten Pulvermassen bei grösseren Mengen des Salzes zuletzt etwas geringer, übrigens ist sie durchaus gleichmässig und führt zur Annahme von nur zwei wesentlich verschiedenen Verbindungen zwischen kohlensaurem Natron und Wasser, nämlich mit zehn und einem Molecüle des letzteren. Ganz damit übereinstimmend, hat Hammerl nur diese beiden Verbindungen durch Krystallisation aus gesättigten Lösungen bei verschiedenen Temperaturen erhalten, nämlich $\text{Na}_2\text{CO}_3 + 10\text{H}_2\text{O}$ zwischen 15 und 32°, dagegen $\text{Na}_2\text{CO}_3 + \text{H}_2\text{O}$ zwischen 35 und 95°. Die mehrfach angegebenen anderen Verbindungen bezeichnet er wieder als labile Gleichgewichtszustände der Molecüle, und der Verlauf der Dissociation bei gewöhnlicher Temperatur macht es jedenfalls unwahrscheinlich, dass unter den neun letzten Wassermolekülen der krystallirten Soda durch ihre Lage verschiedenartig gebundene angenommen werden dürfen.

Dass nach den früheren Versuchen v. Blüchers die Verbindung mit einem Molecüll Wasser im Vacuum neben Schwefelsäure für unzersetzbar gehalten wurde, erklärt sich aus ihrer geringen Dampfspannung ohne weiteres, während die andere Angabe desselben Beobachters, dass phosphorsaures Natron in vier Tagen durch Schwefelsäure im Vacuum vollständig entwässert werden soll, der nach meiner Erfahrung dazu erforderlichen langen Versuchsdauer widerspricht.

Durch schwaches Erhitzen ganz entwässerte Soda, welche in feuchter Luft vier Fünftel ihres Krystallwassers wieder aufgenommen hatte, zeigte gegen das gewöhnliche Salz eine merklich geringere relative Spannung, nämlich bei 15 $\frac{1}{4}$ ° im ersten

Versuche 0,51, dann bei $15\frac{3}{4}$ und bei 16° übereinstimmend 0,53 und bei $16\frac{1}{2}^{\circ}$ 0,54. Die Abweichung ist viel beträchtlicher, als ich sie sonst beobachtet habe, und sie unterscheidet sich außerdem dadurch, dass das aus Wasserdampf gebildete Salz im Gegensatz zu anderen in gleicher Weise entstandenen unter denselben Umständen weniger und nicht mehr Wasser verdampfen lässt, als das gewöhnliche.

4. Borsaures Natron. $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 + 10\text{H}_2\text{O}$.

Die Verdunstung des Krystallwassers vom Borax zeigte in verschiedenen Versuchen wesentliche Abweichungen, die bis jetzt nicht aufgeklärt sind. Vielleicht beruhen sie auf einer Verschiedenheit der Verhältnisse bei der Darstellung des Salzes, weil ich die Präparate für meine Versuche theilweise absichtlich von möglichst abweichendem Aussehen und von verschiedenen Darstellungen benutzte, um nicht zufällige Eigenschaften der Krystalle mit normalen zu verwechseln. Damit wenigstens der Einfluss von abnormem Gehalt an Krystallwasser für das Endresultat beseitigt würde, habe ich schliesslich stets das Gesamtgewicht des rückständigen Wassers bestimmt. Der fein zerriebene Borax sowohl, wie einzelne grössere Stücke davon zeigten in zwei Fällen ein Verhalten, wie ich es am Kupfervitriol regelmässig beobachtet habe¹⁾, nämlich anfangs waren die Wasserverluste fast unmerklich, bis nach tagelangem Liegen in ganz trockener Luft jedenfalls durch die Wirkung der Dissociationsspannung eine derartige Veränderung der ganzen Masse erfolgte, dass nun eine die anfängliche bedeutend übertreffende Wasserverdunstung stattfand. Das geschah aber nicht immer, sondern in den meisten Fällen liess der fein zerriebene Borax sofort eine beträchtliche und in mehreren Versuchen gleiche relative Spannung erkennen, die gewöhnlich, doch nicht immer, nach mehreren Tagen erheblich abnahm. Nach dem Verdunsten des Krystallwassers bildete das rückständige Pulver eine ziemlich fest zusammenhängende Masse, vielleicht eine Folge der Vereinigung des Krystallpulvers mit noch vollem Wassergehalt, wie man ja diese der Regelation des Eises ähnliche Er-

1) W. Müller-Erzbach, Chem. Ber. 17. p. 1420. 1884.

scheinung auch bei anderen Krystallpulvern beobachtet kann. In allen untersuchten Fällen zeigte sich schliesslich die Spannung dann fast gleich Null, wenn durch späteres Erhitzen entweder genau oder annähernd fünf Moleküle Wasser ausgetrieben werden konnten. So liessen 0,127 g Borax mit 0,060 g Wasser nach 45 tägigem Verdunsten ein Pulver zurück, das in 39 Tagen sein Gewicht nicht weiter änderte und noch $29\frac{1}{3}$ mg Wasser enthielt. Aus 0,136 g Borax entwichen dagegen durch Verdunsten 28 mg Wasser von den nach der Formel vorhandenen 64, nachher durch Erhitzen aber 32 mg; und dieser Beobachtung analog verlor auch nach zwei späteren, unter sich gleichen Versuchen das Salz zunächst nur $4\frac{1}{3}$ Moleküle Wasser. Durch solche Abweichungen wurde die Zahl der Versuche, die ich mit Boraxpulver angestellt habe, sehr gross. Es erscheint mir aber überflüssig, sie ausführlich mitzutheilen, da es zur Ver deutlichung der Sachlage genügt, wenn ein paar Reihen vollständig angeführt werden.

Gewicht des Salzes	Durchschnittliche Temp.	Gewicht d. Krystallwassers	V_1	Gewichtsverlust des Salzes	V_2	Gewichtsverlust d. reinen Wassers	Relative Spannung V_1/V_2
0,164 g	$20\frac{1}{2}^{\circ}$	0,077 g		11 mg	39 mg (48 St.)	0,28	
—	$19\frac{1}{2}$	—		8	16	0,19	
—	$16\frac{1}{2}$	—		9	40	0,22	
—	17	—		5	37	0,14	
—	$18\frac{1}{2}$	—		$3\frac{1}{2}$	57	0,06	
0,136 g	43° (erhitzt) $20\frac{1}{2}$	0,064 g		9 mg	22 mg	0,41	
—	—	—		8	38	0,21	
0,782 g	$15\frac{1}{4}^{\circ}$	0,368 g		10 mg	34 mg	0,29	
—	$16\frac{1}{4}$	—		$8\frac{1}{2}$	30	0,28	
—	17	—		12	40	0,30	
—	$17\frac{1}{2}$	—		$12\frac{1}{2}$	39	0,32	
—	$18\frac{1}{2}$	—		24	75	0,32	
—	20	—		18	88	0,34	
—	21	—		14	45	0,31	
—	22	—		12	44	0,28	
—	23	—		11	50	0,22	
—	24	—		11	55	0,20	
—	23	—		20	105	0,19	
—	22	—		37	260	0,14	
				zusammen 185			
—	19°	—		25	1120	0,02	
				zusammen 210			(im Rest 0,180 g Wasser gef.)

Gewicht des Salzes	Durchschnittliche Temp.	Gewicht d. Krystallwasser	V_1	Gewichtsverlust des Salzes	V_2	Gewichtsverlust d. reinen Wassers	Relative Spannung V_1/V_2
0,245 g	15 $\frac{1}{2}$ °	0,115 g	3 $\frac{1}{2}$	18 mg	5	18 mg	0,27
—	16 $\frac{1}{2}$ °	—	—	13	5	13	0,38
—	17 $\frac{1}{2}$ °	—	—	39	6	39	0,15
—	20	—	—	137	4	137	0,03
—	22	—	—	80	15	80	0,19
—	22 $\frac{1}{2}$ °	—	—	100	28	100	0,28
—	23	—	—	20	2	20	0,10
zusammen 58 $\frac{1}{2}$							
—	19 °	—	8	1120 mg	—	0,007	

Nach den beiden letzten Reihen ist unter der höheren Spannung etwas über die Hälfte des Wassers verdunstet, in einzelnen vorher angeführten Versuchen war es weniger, nämlich 13/30. Die relative Dampfspannung des schliesslich rückständigen Salzes erwies sich in allen Versuchen ganz gering, sie betrug nach der genaueren Bestimmung an einer Probe in den ersten 23 Tagen 0,011 und in den darauf folgenden 44 Tagen 0,012, und man darf demnach trotz aller Abweichungen doch aus den Verdunstungsversuchen folgern, dass jedenfalls annähernd die erste Hälfte des Krystallwassers im Borax viel fester gebunden ist, als die zweite. Mit dieser Abstufung stimmt eine ältere Beobachtung Payen's überein, nach welcher aus einer gesättigten Boraxlösung zwischen 56 und 79° ein Salz mit fünf Molekülen Wasser auskrystallisiert.

Das in der letzten Versuchsreihe angeführte Boraxpulver von 0,245 g Gewicht zeigt den grössten Wechsel in seiner Dissociation und weist auf die früher erwähnte veränderliche Zersetzung mancher Boraxkrystalle hin, auch hier vergrössert sich von einem bestimmten Grade der Zersetzung an die relative Dampfspannung so bedeutend, freilich nachdem sie vorher fast in demselben Masse abgenommen hatte, sodass sie einmal nur noch das Dreifache der schliesslich normalen geringeren Spannung des wasserärmeren Salzes ausmachte.

Eine aus pulverisiertem wasserfreiem Boraxglase und aus Wasserdampf entstandene Verbindung, welche 46 Proc., also $9\frac{3}{4}$ Moleküle Wasser enthielt, zeigte in drei aufeinander

folgenden Versuchen bei 15° den Spannungsquotienten 0,26, bei $15\frac{1}{2}^{\circ}$ 0,28 und bei 16° 0,25, sodass ich mit Berücksichtigung der früheren Versuche kein Bedenken trage, 0,27 als die normale relative Spannung des krystallisierten Borax für die Temperatur von 16° zu bezeichnen. Die lebhaftere Verdunstung setzte sich bei dem aus Wasserdampf gebildeten Salze ganz gleichmässig fort, bis nur noch $\frac{4}{5}$ /3 Moleküle Wasser vorhanden waren, nachher war die Spannung wieder den früheren Beobachtungen entsprechend auf einen viel geringeren minimalen Grad herabgesunken. Obgleich demnach sowohl die normale Spannung, als auch die Grenze des Spannungswechsels mit hinreichender Bestimmtheit aus meinen Versuchen abgeleitet werden können, so habe ich doch bis jetzt keinen Anhalt gefunden, der über die Ursache der vereinzelt beobachteten abnormen Spannungen eine Aufklärung gebracht hätte.

Nach den vorliegenden Angaben über die specifischen Gewichte kommen auf ein Molekül Wasser beim schwefelsauren Natron 16,7 Raumtheile, beim kohlensauren Natron 15,2 und beim borsauren Natron nach verschiedenen Bestimmungen 13,2 bis 14,8 Raumtheile, während für die drei Salze bei derselben Temperatur die relativen Spannungen 0,78—0,67 und 0,28 betragen. Es ergibt sich also nach der Dampfspannung dieselbe Abstufung, wie nach der Contraction, und das gleiche Resultat konnte, wie schon früher erwähnt ist, auch für eine grössere Zahl von anderen darauf bereits untersuchten Salzen festgestellt werden. Nähere Angaben darüber will ich jedoch einer späteren Abhandlung vorbehalten und nun den wesentlichen Inhalt der vorstehenden Mittheilung in folgende Resultate zusammenfassen:

1. Durch das Verdunsten wasserhaltiger Salze in ganz trockener Luft ergeben sich constante Dissociationsspannungen.
2. Nach der abnehmenden Festigkeit des gebundenen Wassers hat man beim phosphorsauren Natron drei Verbindungen zu unterscheiden, mit zwei, mit sieben und mit zwölf Molekülen Wasser.

3. Beim schwefelsauren Natron ist alles Wasser gleichartig gebunden.
4. Beim kohlensauren Natron sind die beiden Verbindungen mit einem und mit zehn Molekülen Wasser zu unterscheiden.
5. Beim borsauren Natron ebenso die beiden Verbindungen mit fünf und mit zehn Molekülen Wasser.
6. Die Dampfspannungen, welche den bis jetzt bekannten Contractionen bei der Bildung der wasserhaltigen Salze entsprechen, führen auf Grade der chemischen Verwandtschaft, denen die Anziehungskraft der entwässerten Salze zum freien Wasserdampf analog ist.
7. Auch die letzten Moleküle des Krystallwassers vom phosphorsauren und vom kohlensauren Natron werden in längerer Zeit durch Verdampfen bei gewöhnlicher Temperatur vollständig an die zum Austrocknen der Luft benutzte Schwefelsäure abgegeben.

Bremen, im Juli 1884.

**VI. Ueber die electrische Leistungsfähigkeit des kohlensauren Wassers und eine Methode, Flüssigkeitswiderstände unter hohen Drucken zu messen;
von Emanuel Pfeiffer.**

(Aus dem phys. Laboratorium der techn. Hochschule zu München.)
(*Hierns Taf. VII Fig. 9—18.*)

Schon Hittorf hat in einer seiner bekannten Arbeiten¹⁾ über die Wanderung der Ionen während der Electrolyse den Ausspruch gethan, dass in Zukunft die electrischen Verhältnisse bei Beurtheilung der chemischen Constitution der Körper in zweifelhaften Fällen von entscheidender Bedeutung seien, und seitdem hat sich dieser Satz in einer Reihe von Fragen chemischen Charakters bewahrheitet.

1) Hittorf, Pogg. Ann. **103.** p. 17. 1858.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. **XXIII.**

Nachdem die electrischen Erscheinungen auch in der Frage über die Natur der Absorption von Gasen in Flüssigkeiten vor kurzem von F. Kohlrausch¹⁾ benutzt worden sind, der aus dem Verlaufe der Curve, welche die Beziehung zwischen Prozentgehalt und electrischer Leitungsfähigkeit bei wässriger Ammoniaklösung darstellt, den Schluss zog, dass man es bei dieser Verbindung sicher nicht mit einer Lösung von Ammoniumhydrat in Wasser zu thun habe, wie bisher vielfach angenommen wurde, drängte sich mir die Frage auf, wie sich in dieser Beziehung die Lösung von Kohlensäure in Wasser verhalte, welche nur durch Anwendung höherer Drucke erschöpfend behandelt werden kann.

In der Absicht, dieser Frage näher zu treten, unterstützten mich sehr wesentlich zwei Punkte:

1. besitzen wir in dem hier als bekannt vorauszusetzenden Cailletet'schen Apparat, in welchem dieser die Verflüssigung der sogenannten permanenten Gase zeigte, ein Mittel zur verhältnissmässig leichten Herstellung hoher Drucke, und

2. liegen für die Lösung von Kohlensäure in Wasser die nötigen Hülfszahlen vor, indem vor kurzem durch von Wroblewsky²⁾ die Veränderung der Absorptionscoefficienten von Kohlensäure in Wasser unter hohen Drucken einer Untersuchung unterworfen worden ist, auf dessen Angaben ich mich in vorliegender Abhandlung stützen werde.

Er gibt in einer Tabelle die unter verschiedenen Drucken von einer bis 30 Atmosphären durch 1 ccm Wasser absorbierten Kohlensäuremengen für die Temperaturen 0° und 12,43° an. Für diese letzteren entwarf ich zwei Curven, welche die Abhängigkeit des Kohlensäuregehaltes vom Drucke angaben. Die von mir zu lösende Aufgabe bestand sodann nur darin, für das unter irgend einem Drucke mit Kohlensäure gesättigte Wasser die Leitungsfähigkeit zu bestimmen. Denn da ich zwei Versuchsreihen in der Nähe obiger zwei Temperaturen durchführte, so war die Berechnung des entsprechenden Kohlensäuregehalts durch lineare

1) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 189. 1879.

2) v. Wroblewsky, Wied. Ann. 18. p. 290. 1883.

Interpolation aus den Zahlen v. Wroblewsky's gestattet, umso mehr, als in der bekannten Formel Bunsen's¹⁾:
 $c = \alpha + \beta t + \gamma t^2$, wo c den Absorptionscoëfficienten eines Gases in einer Flüssigkeit bei der Temperatur t und α , β und γ Constanten bedeuten, der Coëfficient γ in allen von ihm untersuchten Fällen einen sehr kleinen numerischen Werth besitzt.

Apparate.

Die Widerstandsbestimmungen geschahen nach der bekannten Kohlrausch'schen Methode mit Wechselströmen.²⁾

I. Zur Erzeugung der alternirenden Ströme diente der von Kohlrausch angegebene Sinusinductor³⁾, der von dem ancirter Stelle beschriebenen nur darin abweicht, dass er eine Belastung bis zu 30 kg zuliess, sodass die Tourenzahl des Magnets bis zu ca. 160 in der Secunde gesteigert werden konnte. Ein Bleigewichtssatz gestattete, die Belastung in Intervallen von 3 zu 3 kg zu variiren.

II. Als strommessendes Instrument benutzte ich Kohlrausch's Unifilardynamometer.⁴⁾

III. Die Ablesung der Ausschläge dieses Spiegelinstrumentes geschah mit Fernrohr und Scala, welch' letztere über 3 m vom Spiegel entfernt aufgestellt war.

IV. Die Widerstandsmessungen wurden nach der Wheatstone'schen Brückenmethode mit Hülfe der grossen Siemens'schen Brücke durchgeführt. Das Schema, nach dem die Messungen vorgenommen wurden, ist aus Fig. 11 ersichtlich: J bezeichnet die vier hintereinander geschalteten Rollen des Sinusinductors, f den festen Multiplikator und e die aufgehängte Rolle des Dynamometers D . q , r und R sind die Zweigwiderstände der Siemens'schen Brücke, W der zu messende Flüssigkeitswiderstand. Der Stromschlüssel a blieb fortwährend geschlossen, da die Erwärmung bei den an sich schwachen Strömen und bei den in meinem Fall vorkom-

1) Bunsen, Gasom. Meth.

2) Kohlrausch, Pogg. Ann. 154. p. 3. 1875.

3) Kohlrausch, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 292. 1874.

4) Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 556. 1862.

menden, meist sehr grossen Widerständen nicht in Betracht kam. Wegen des grossen Betrages dieser letzteren musste bei allen Widerstandsmessungen (die Capacitätsmessungen [s. unten] mit Essigsäure ausgenommen) das Verhältniss:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{100}{1000}$$

genommen und daher auf den Vortheil der Gleichheit von ρ und r verzichtet werden. In dem zur Rolle e führenden Brückenzweig befand sich der Commutator C zum bekannten Zwecke der Präzisirung der Widerstandsmessung, indem nicht die der Beziehung:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{R}{W}$$

entsprechenden Werthe R durch die Nullstellung des Dynamometers ermittelt, sondern für ein zu grosses und zu kleines R je die zwei den beiden Commutatorstellungen entsprechenden Ablenkungen abgelesen wurden.

Vor Anwendung der Siemens'schen Brücke als Messapparat musste untersucht werden, 1. ob sie für die bei Anwendung von Wechselströmen auftretenden Spannungsdifferenzen noch genügend isolirte und 2., ob die Selbstinduction der Rollen nicht störend wirkte, wenngleich dieselbe bekanntlich bei den Siemens'schen Rheostaten durch bifilare Wickelung der Rollen möglichst vermieden war. Dies geschah in der Weise, dass ich einen bestimmten, von Selbstinduction gewiss freien Widerstand einmal mit alternirenden Strömen und Dynamometer, das andere mal mit constantem Strom und Galvanometer beobachtete und die Resultate verglich. Als zu bestimmenden Widerstand wählte ich Zinkvitriollösung mit Electroden von amalgamirtem Zink, da hier bekanntlich bei nicht zu starken Strömen keine Polarisation auftritt¹⁾, also die Widerstandsmessung auch mit constantem Strom ausgeführt werden kann. Diese Flüssigkeit wurde in der Weise hergestellt, dass concentrirte Zinkvitriollösung mit Zinkcarbonat gekocht wurde, um die freie Säure zu entfernen, und dass dann nach Entfernung des Zinkcarbonats mittelst Filtration diese concentrirte Lösung mit Wasser so

1) Wiedemann, Galv. 2. p. 794 ff. 1883.

lange verdünnt wurde, bis sich mittelst des Pyknometers das specifische Gewicht 1,285 ergab, welchem Gehalt bei 18° das Maximum der Leistungsfähigkeit zukommt.¹⁾ Als Widerstandsgefäß wählte ich eine über 1,5 m lange, im Inneren ca. 11,3 qmm Querschnitt besitzende Glasröhre, welche von 5 zu 5 cm getheilt und mit Quecksilber calibrirt war. Die untere der beiden, die Glasröhre knapp ausfüllenden Zink-electroden war fest eingekittet, die obere mittelst eines an gelötheten Drahtes verschiebbar. Auf diese Weise konnten Widerstände bis über 30000 Siemens-Einheiten erzielt werden; ich wählte den zu untersuchenden Widerstand deshalb so gross, um die Brücke unter ungefähr den nämlichen Bedingungen zu prüfen, unter denen ich sie später zu benutzen hatte.

Bei der Messung war nun neben dem Dynamometer ein ausserst empfindliches Wiedemann'sches Spiegelgalvanometer aufgestellt und wurde unmittelbar nacheinander für die nämliche Stellung der oberen Electrode der Widerstand mit constantem Strom und Galvanometer, sowie mit Wechselströmen und Dynamometer gemessen. Aus der Reihe von Vergleichungen greife ich ein Beispiel heraus, das die befriedigende Uebereinstimmung beider Messmethoden zeigt. Bei einem ungefähr Widerstand von 27000 Siemens-Einheiten ergab sich die Leistungsfähigkeit obiger Lösung für 18°:

- a) für constanten Strom = $438,9 \cdot 10^{-8}$,
- b) für Wechselströme = $439,5 \cdot 10^{-8}$.

Für gleiche Temperatur und gleichen Gehalt findet sich nach Beetz $443 \cdot 10^{-8}$ und nach Kohlrausch $452 \cdot 10^{-8}$.

Hiermit ist die Anwendbarkeit der Brücke für Wechselströme erwiesen.

V. Widerstandsgefässe. — Einmal benutzte ich für die geringeren Kohlensäuregehalte, die unter gewöhnlichem Atmosphärendruck erzielt werden konnten, zwei Glasgefässe nach Kohlrausch's Angaben²⁾, nämlich die an eben citirter Stelle mit Nr. 2 und 3 bezeichneten. Das Gefäß Nr. 3

1) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 50. 1879.

2) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 6 u. Taf. I. 1879.

hatte eine kleine Abänderung erhalten, indem sein Boden einen kugelförmigen Glasansatz nach innen trug, sodass zwischen diesem und der äusseren Gefässwand die unteren Ränder der beiden platinirten Platinelectroden unveränderlich festgelegt waren, was eine Veränderung der Widerstandscapacität unmöglich machte. Wegen der Grösse meiner Widerstände benutzte ich zuletzt fast ausschliesslich letzteres Gefäss.

Andererseits bediente ich mich für Kohlensäuregehalte, zu deren Herstellung erhöhter Druck erforderlich war, zweier Glasröhren, welche in den Cailletet'schen Apparat eingesetzt wurden.

VI. Hiermit komme ich zum Cailletet'schen Apparat, dessen ursprüngliche Einrichtung ich übergehen kann. Nur der für meine Zwecke getroffenen Abänderungen muss ich näher gedenken. Diese beziehen sich

1. auf die unter V. erwähnten Glasröhren, in denen das kohlensaure Wasser unter Druck untersucht wurde. Nach einer langen Reihe von missglückten Experimenten haben dieselben folgende, aus Fig. 12 ersichtliche Gestalt angenommen: die Messingfassung *A*, in welche Cailletet's Druckröhren eingekittet, und mittelst deren sie im Apparat befestigt werden, behielt äusserlich ihre Gestalt bei, nur die innere Bohrung war bedeutend weiter, sodass die beiden von mir zur Anwendung gebrachten Glasröhren, die in der Folge als Druckröhre I und II bezeichnet werden, äussere Durchmesser von 1,7 cm und 1,6 cm erhielten. Die Gesamtlänge betrug ca. 60 cm, diejenige des aus *A* herausragenden Theiles etwa 27 cm; der untere Fortsatz reichte bis auf den Boden des Eisencylinders des Cailletet'schen Apparates und endigte mit einer Verdickung *b*, in welche das gläserne Verschlussstück *B* eingeschliffen war. Ohne die Verdickung wäre das Einbringen der schwimmenden Electrode (s. weiter unten) nicht möglich gewesen, da sich diese ganz eng an die innere Röhrenwand anlegte. Das obere Ende *c* ist halbkugelförmig abgeschmolzen und hat in der Mitte eine kleine Oeffnung, die einen Platindraht durchlässt. Letzterer trägt an seinem unteren Ende ein angeneitetes, platinirtes Platin-

blech *a* von halbkugelförmiger Gestalt, dessen Rand sich eng an die Glaswand anschliesst bis auf eine Stelle, wo die Electrode eingedrückt ist, um Flüssigkeiten leichter durchzulassen. Das obere Ende des Platindrahtes ist an eine Messingkappe *C* angelötet, die von aussen auf der Glashöhre aufsitzt und sie über 1 cm nach abwärts eng umschliesst. Der Verschluss der Röhre wird dann dadurch bewerkstelligt, dass Glas und Kappe mit Siegellack zusammengekittet werden. Die Kappe endigt nach oben in eine Spitze, auf die eine Klemmschraube aufgesetzt wird, die als obere Stromzuleitung dient. In einer Durchbohrung der Spitze ist eine zu einem seitlich aufgestellten Stativ führende Kette befestigt, die den Zweck hat, bei etwaigen Zertrümmerungen der Röhre die schwere Metallkappe festzuhalten und unschädlich zu machen.

Die untere Stromzuleitung geschah durch den Apparat selbst. Der Leitungsdraht wurde am Eisenklotz befestigt, in den das Quecksilber eingefüllt war, welches die Druckröhren nach unten abschloss. Auf der Quecksilberoberfläche befand sich ein Schwimmer *d*, bestehend aus einer der festen Electrode ähnlichen Platinkuppe mit nach abwärts angenietetem Platindraht. In die untere Höhlung der Electrode war ein Glaskörper von einer Grösse eingeschmolzen, dass das Ganze auf dem Quecksilber schwamm und gerade die Kuppe sich auf das Quecksilberniveau auflegte. Das untere Ende des Platindrahtes war horizontal umgebogen und derart zu einem Kreis geformt, dass er sich an die innere Röhrenwand möglichst eng anschloss. Da sich auch die Electrode selbst so gut an dieselbe anschmiegte, als die freie Bewegung erlaubte, so war, wenn sich bei der Compression der Schwimmer auf dem Quecksilber nach aufwärts bewegte, eine Seitenverschiebung nicht möglich.

Der Gang der Versuche wird später unter der Ueberschrift „Versuchsanordnung“ genau auseinander gesetzt werden, hier muss ich nur zur Vollendung der Beschreibung bemerken, dass nach Befestigung der Röhre im Cailletet'schen Apparat dieselbe unten durch Quecksilber abgesperrt war, auf dessen Niveau die untere Electrode schwamm.

Ueber derselben stand die zu untersuchende Wassersäule und über dieser Kohlensäuregas (s. Fig. 12). Eine Widerstandsbestimmung konnte also erst vollzogen werden, wenn die Compression und Absorption der Kohlensäure soweit vorgeschritten war, dass die obere, feste Electrode bereits in Wasser tauchte. Halbkugelförmige Gestalt hatten die Electroden erhalten, um bei dem gegebenen Röhrenquerschnitt eine möglichst grosse Electrodenoberfläche zu erzielen. Dieselbe betrug bei

Druckröhre I ca. 2,9 qcm,
bei der für höheren Druck bestimmten

Druckröhre II ca. 2,7 qcm,
sodass ich schon aus Kohlrausch's¹⁾ Angaben schliessen durfte, dass sich der Einfluss der Polarisation schon bei mässiger Tourenzahl des Inductors nicht mehr geltend machen würde. In wie weit dies der Fall war, zeigt die nachfolgende kleine Tabelle. Es wurde Maximalessigsäurelösung bei konstanter Temperatur und Electrodenentfernung in der Druckröhre I in Bezug auf ihren Widerstand mit verschiedenen Tourenzahlen untersucht. Aus der Abnahme der beobachteten Widerstände ist der Einfluss der Polarisation deutlich ersichtlich, der sich bei geringen Tourenzahlen als Vermehrung des wahren Widerstandes bemerkbar macht. Von 21 kg Belastung an werden die Abweichungen unbedeutend und liegen bereits innerhalb der Beobachtungsfehler. Bei den wesentlich grösseren Widerständen, die ich zu untersuchen hatte, war also bei einer Belastung von 21 kg um so mehr kein Einfluss der Polarisation zu befürchten.

Tabelle I.

Belastung des Inductors	Tourenzahl des Magnets	Widerstand	Belastung des Inductors	Tourenzahl des Magnets	Widerstand
12 kg	78	1061,8	21 kg	143	1044,7
15 "	100	1055,0	24 "	153	1041,8
18 "	127	1048,1	27 "	160	1042,5

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 301. 1874.

2. Die nächste Abänderung am Cailletet'schen Apparat betrifft das Manometer. Das mit der Presse durch ein Kupferrohr verbundene, bis 300 Atmosphären reichende Bourdon'sche Manometer erwies sich natürlich als viel zu unempfindlich. Auch Versuche mit zwei empfindlicheren Manometern derselben Construction fielen zu meiner Unzufriedenheit aus; selbst die besten Instrumente dieser Art haben immer etwas toten Gang, und der Einfluss der Temperatur auf ihre Angaben lässt sich schwer mit Genauigkeit angeben. Ich entschloss mich daher zur Construction eines Luftmanometers (Fig. 13). Mit dem eben erwähnten kupfernen Verbindungsrohr war mittelst Ueberfangs schraube das Ansatzstück *s* des mit der Bohrung *a* versehenen, kreisrunden Eisenklotzes *A* verbunden. Durch ein in der Mitte kreisförmig durchbohrtes, einzuschraubendes Messingstück *B* wird der Eisenklotz verschlossen. In die Bohrung von *B* ist das Manometer *C* mit Siegellack eingekittet. Es besteht aus einem Glasgefäß mit zwei nach oben und unten angesetzten Capillarröhren, die Millimetertheilungen tragen. Der Durchmesser im Lichten ist ca. 1,5 mm. Das untere Ansatzstück reicht bis nahe auf den Boden des Eisenklotzes, in den ein Glasgefäß *D* mit sorgfältig gereinigtem und getrocknetem Quecksilber eingesetzt ist. Das untere Ende des Manometers taucht etwa 9 cm tief ins Quecksilber ein, mit dem eingesetzten Glasgefäß *D* erzielt man bessere Reinhaltung des Quecksilbers, als wenn letzteres direct in den Eisenklotz gegossen wird. Das obere Ansatzstück hat eine Länge von ca. 60 cm, von denen 50 aus dem Messingstück *B* hervor- sehen. Die Volumenbestimmung des Gefäßes sowohl, als die Calibrirung der beiden Capillarröhren geschah durch Quecksilberwiegung. Nach sorgfältiger Trocknung wurde das obere Ende zugeschmolzen, das untere offene in Verbindung mit einer vorgelegten Chlorcalciumröhre über dem Eisenklotz *A* aufgestellt. Nachdem der Inhalt des Manometers die Zimmertemperatur sicher angenommen hatte, wurde es in das Quecksilber eingesenkt und festgeschraubt. Gleichzeitig wurden die Zimmertemperatur t_0 und der Barometerstand b_0 , in Atmosphären ausgedrückt, abgelesen. Da auch das Ge-

sammtvolumen v_0 durch die erwähnten Bestimmungen genau bekannt war, so liess sich die im Manometer enthaltene Luftmenge, die manometrische Constante c , berechnen aus der Beziehung:

$$c = \frac{b_0 \cdot v_0}{1 + \alpha t_0},$$

wo α der Ausdehnungscoefficient der Luft ist. Die Grösse c schwankte während meiner Versuche zwischen 2,729 und 2,788; denn während der sich über ein halbes Jahr ausdehnenden Versuche war einmal eine Reinigung und frische Füllung des Manometers nothwendig.

Ueber den aus B hervorragenden Theil des Manometers war eine weite Glasmöhre gestülpt, die zur Vermeidung rascher Temperaturschwankungen mit Wasser gefüllt war. Ein Thermometer hing von oben ins Wasserbad. In bekannter Weise ergibt sich der Druck P in Atmosphären, unter dem die Kohlensäure in der Druckröhre steht, aus der Formel:

$$P = \frac{c(1 + \alpha t)}{v} \pm p + w + e - d;$$

hier ist c die oben näher bezeichnete manometrische Constante, v und t Volumen und Temperatur der comprimirten Luft,

p die Höhendifferenz der Quecksilberkuppen in Druckröhre und Manometer,

w der Quecksilberdruck der Wassersäule,

e die Spannkraft der Wasserdämpfe,

d die Capillardepression im Manometer gegenüber der Druckröhre.

Die vier letzten Grössen sind in Centimetern ausgedrückt. Höhendifferenzen wurden mittelst des Kathetometers bestimmt. Die Einstellung der Quecksilberkuppe in der Druckröhre liess sich trotz des Schwimmers mit genügender Schärfe feststellen, um die Angabe der dritten Decimale in den späteren Tabellen gerechtfertigt erscheinen zu lassen. Der Druck konnte erst von ca. drei Atmosphären an abgelesen werden, mit wachsendem Druck wurde das Manometer immer unempfindlicher, sodass sich bei den höchsten zur Anwendung gelangten

Drucken die Unsicherheit auf einige Einheiten der zweiten Decimale erstreckt.

3. Eine weitere Abänderung bezieht sich auf die Verbindung der hydraulischen Presse mit dem Eisencylinder, in den die Druckröhren eingesetzt werden. Es erwies sich nämlich als unmöglich, die Ventile für längere Zeit derart dicht zu halten, wie es für meine Zwecke nothwendig war. Von den Bleidichtungen lösen sich insbesondere nach längerem Gebrauch Stücke los, die theilweise in den Ventillagern hängen bleiben. Es wurde deshalb ein Metallhahn im Verbindungsrohr angebracht, der nach erfolgter Sättigung des Wassers und nach Ablesung des stattfindenden Druckes geschlossen wurde, sodass dann während der darauf folgenden Widerstandsmessung alles unverändert blieb.

4. Das die Druckröhre umgebende Wasserbad war entsprechend der Zunahme des Querschnittes der Röhre erweitert. Die Temperaturen, bei denen ich den Widerstand der Lösungen zu bestimmen hatte, mussten sich aus den oben angegebenen Gründen an die von v. Wroblewsky angewandten Temperaturen 0 und $12,43^{\circ}$ möglichst annähern. Ich verschaffte mir dieselben in folgender Weise:

Um eine um 0° liegende Temperatur zu erhalten, wandte ich zwei grosse, je 15 l Inhalt fassende Blechkästen an, die ganz in Filz eingenäht waren. Dieselben waren mit geschabtem Eis und der eine von beiden immer mit Wasser gefüllt. Aus dem hochstehenden Kasten floss das Eiswasser von unten in das Bad; aus dessen oberen Rand war ein Stück ausgesprengt, und dadurch dem überfließenden Wasser an der Aussenseite des Bades eine bestimmte Bahn vorgeschrieben, in der es in den die Schutzglocke tragenden Teller floss. Dadurch zeigte die wegen der tiefen Temperatur sonst dicht mit Thau beschlagene Aussenwand des Bades an den vom Wasser bespülten Stellen die Druckröhre vollkommen scharf, und wurden von dieser Seite her die Einstellungen und Ablesungen in derselben bewerkstelligt. Das im Teller sich ansammelnde Wasser floss von da in den unteren Eiskasten. War sämmtliches Wasser durchgelaufen, so wurden die beiden Kästen vertauscht.

Zur Erreichung der zweiten Temperatur $12,43^{\circ}$ wurde in analoger Weise Wasser aus der Wasserleitung durch das Bad geschickt.

VII. Apparat zur Erzeugung der Kohlensäure. Dieses Gas wurde hergestellt durch Aufgiessen von chemisch reiner, verdünnter Salzsäure auf Marmor mittelst einer langen Trichterröhre. Bei der bekannten Empfindlichkeit des elektrischen Leitungsvermögens des reinen Wassers gegen geringfügige Verunreinigungen¹⁾ musste grosse Sorgfalt auf die Reinigung des Gases verwandt werden. Es ging durch zwei Vorlagen, die mit wässriger Lösung von doppeltkohlensaurem Natron gefüllt waren, um sicher jede Spur von mitgerissener Salzsäure zurückzuhalten. Schliesslich wurde es nochmals mit demselben ganz reinen Wasser, das zu den Versuchen selbst diente, gewaschen.

VIII. Der Destillirapparat. Das Wasser, dessen ich mich bei meinen Versuchen bediente, wurde aus einem verzinnten Kupferkessel zweimal destillirt und kam auf seinem Wege nur mit Luft und Zinn in Berührung. Es hatte, nachdem es mit Luft gesättigt war, eine Leitfähigkeit, die nur sehr wenig um 3×10^{-10} schwankte, wenn für Quecksilber von 0° die Leitfähigkeit = 1 gesetzt wird.²⁾ Mit Luft wurde es gesättigt, um die Versuchsbedingungen von Wroblewsky's zu erhalten, dessen Zahlen sich auf lufthaltiges, destillirtes Wasser beziehen. Ich erhielt obiges reine Wasser ohne besondere Vorsichtsmassregeln, nur musste der Kessel während der Destillation immer ziemlich gefüllt bleiben; wenn derselbe etwa halb geleert war, machte sich ein Steigen der Leitfähigkeit des Wassers bemerkbar. Grössere Reinheit des Wassers hätte mir nichts weiter genutzt, da dieselbe doch bei den verschiedenen Manipulationen, denen es bis zur Messung im

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergzb. S. p. 1 ff. 1876.

2) Von nun an soll bei allen auf die Leitfähigkeit bezüglichen Zahlen der Factor 10^{-10} fortgelassen werden, sodass sich alle Angaben auf 1×10^{-10} als Einheit beziehen.

Cailletet'schen Apparat ausgesetzt war, wieder verloren gegangen wäre. Das Nähere über diese Verhältnisse folgt weiter unten.

Versuchsanordnung.

1. Für Kohlensäuregehalte, die unter Atmosphärendruck zu erhalten sind, diente das oben erwähnte Widerstandsgefäß Nr. 3. Die Widerstandscapacität desselben wurde mit Essigsäurelösung vom specifischen Gewicht 1,022 und maximaler Leistungsfähigkeit λ bestimmt, welch' letztere als Function der Temperatur ausgedrückt wird durch die Gleichung:

$$10^8 \cdot \lambda = 15,2 + 0,27 (t - 18).^1)$$

Diese Lösung stellte ich mir her durch Mischung von käuflicher, chemisch reiner, concentrirter Essigsäure mit Wasser. Um zu prüfen, ob ich für meine Lösung die Zahl von Kohlrausch zu Grunde legen durfte, wurde sie im Kohlrausch'schen Gefäß Nr. 2 (s. p. 629) von grösserer Capacität untersucht; es wurde zu diesem Zweck diese Capacität k einmal mit der oben (s. p. 629) genauer definirten Zinkvitriolösung und dann mit der zu untersuchenden Essigsäurelösung bestimmt. Ich erhielt im ersten Fall:

$$k = 0,001\ 123,$$

im zweiten Fall: $k = 0,001\ 130.$

Nachdem ich mich so von der Richtigkeit obiger Formel für meine Lösung überzeugt hatte, bestimmte ich mit ihr die Capacität k_1 des Gefäßes Nr. 3 zu:

$$k_1 = 0,000\ 013\ 75.$$

Auch bei dieser kleinen Capacität betrug der Widerstand meines reinen Wassers in diesem Gefäß immer noch 50000 Siemenseinheiten.

Sollte nun die Leistungsfähigkeit eines kohlensauren Wassers bestimmt werden, so wurde das mit reinem Wasser gefüllte Widerstandsgefäß in ein grosses Wasserbad gesetzt, das Ende des Gasentwickelungsapparates, welches aus einer langen, spitz ausgezogenen Glasröhre bestand, bis auf den Boden des Gefäßes getaucht und der Durchgang der Kohlensäure so lange fortgesetzt, bis der Widerstand der Lösung

¹⁾ Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 51. 1879.

sich nicht mehr änderte. Dann wurde nach Entfernung der Glasröhre und Einsetzen des Glasstopfes der Widerstand definitiv bestimmt. Aus der Temperatur des Bades und dem Barometerstand konnte dann für tiefere Temperaturen nach Bunsen¹⁾, für höhere nach Naccari und Pagliani²⁾ der Gehalt an Kohlensäure berechnet werden.

2. Für höhere Gehalte an Kohlensäure benutzte ich die beiden bereits beschriebenen Druckröhren *I* und *II*. Bei der Füllung wurden dieselben vertical aufgestellt, mit der Oeffnung *b* (Fig. 12) nach oben, das Verschlussstück *B* entfernt, sodann soviel Quecksilber eingegossen, dass das übrigbleibende Volumen der für den Versuch in Aussicht genommenen Kohlensäuremenge entsprach. Hierauf wurde mittelst eines fein ausgezogenen Trichters das Wassers in die Röhre gebracht (die Wassersäule hatte meist eine Höhe unter 1 cm) und die schwimmende Electrode *d*, mit der Kappe nach unten, in die Röhre geworfen. Das Füllen mit Kohlensäure geschieht alsdann, indem die Ausflussröhre des Kohlensäureapparates so tief ins Gefäss gesenkt wird, bis sein Ende unter Wasser ist. Nachdem der durchgehende Gasstrom alle Luft verdrängt hat und das Ansatzstück *B*, dessen enges Ende mit dem Finger verschlossen wird, in gleicher Weise mit Kohlensäure gefüllt ist, wird letzteres rasch in die Röhre eingesetzt und diese umgedreht, natürlich die untere Oeffnung immer mit dem Finger verschlossen. Das Quecksilber schliesst dann die Röhre unten ab, die schwimmende Electrode begibt sich an seine Oberfläche und begrenzt die Wassersäule nach unten. Das überschüssige Quecksilber wird jetzt ausgelassen und die Röhre im Cailletet'schen Apparat befestigt.

Nunmehr beginnt die Compression und wird so lange fortgesetzt, bis die obere, feste Electrode ganz in Wasser eintaucht. Die Druckröhre trägt eine Millimetertheilung; die Kuppe der schwimmenden Electrode wird auf einen passenden Theilstrich derselben eingestellt und am Mano-

1) Bunsen, Gasom. Meth. p. 219. 1877.

2) Naccari u. Pagliani, Fortschr. d. Phys. 36. p. 258. 1880.

meter der Druck abgelesen. Nun beginnt für diese ausserhene Stellung der unteren Electrode die Sättigung in ähnlicher Weise, wie sie v. Wroblewsky¹⁾ bei seinen Versuchen ausführte. Es wurden geringe Druckschwankungen in rascher Folge hervorgebracht, sodass die schwimmende Kuppe, von ihrer früheren Einstellung an gerechnet, gleich grosse Oscillationen nach oben und unten vollzog. Dadurch wurde die Flüssigkeit fortwährend zwischen der Glasröhre und den Rändern der festen Electrode durchgepresst und so in derselben Vibratoren und Strömungen erzeugt, welche die Sättigung sehr beschleunigten. Wurde nach einiger Zeit wieder eingestellt, so war infolge der Absorption der Druck im Manometer gesunken. Nun wurde die Operation so lange wiederholt, bis ein Sinken des Manometers nicht mehr eintrat. Eine weitere Sicherung, dass die Absorption vollendet ist, gibt die hie und da angestellte Bestimmung des Widerstandes, der mit zunehmender Absorption kleiner und kleiner wird und sich einem Grenzwerth nähert. Die Operation der Sättigung währte ca. eine Stunde. War der stationäre Zustand eingetreten, so wurde die Temperatur des Bades der Druckröhre abgelesen und nach nochmaliger scharfer Einstellung der schwimmenden Electrode der Hahn geschlossen; dann folgte die Ablesung des Quecksilberstandes im Manometer und Bestimmung der Temperatur des zugehörigen Wasserbades. Aus diesen Daten lässt sich der Druck und dann der Kohlensäuregehalt der Lösung aus von Wroblewsky's Zahlen ermitteln. Schliesslich erfolgte die Widerstandsbestimmung und dann nochmalige Beobachtung der Temperatur des Bades der Druckröhre. Das Mittel aus dieser und der ersten Temperaturbestimmung galt als Temperatur während der Widerstandsmessung.

Es erübrigt nun noch, anzugeben, wie aus dem ermittelten Widerstand die Leitfähigkeit bestimmt werden konnte. Zu diesem Zwecke wurde eine empirische Aichung der beiden Druckröhren auf galvanischem Wege vorgenommen, was in folgender Weise geschah: Bevor ich die Röhren zu obigen

1) v. Wroblewsky, Wied. Ann. 18. p. 291. 1883.

Zwecken gebrauchte, wurden sie ganz analog, wie früher beschrieben, mit der schon öfter erwähnten Maximalessigsäure, Quecksilber und etwas Luft gefüllt. Durch geringe Compressionen der letzteren liessen sich zwischen den beiden Electroden alle gewünschten Flüssigkeitshöhen erzielen. Für eine Zahl von Einstellungen der unteren Electrode wurden dann die Widerstände der Essigsäurelösung ermittelt. Die entsprechenden Capacitäten berechnen sich als Product dieser Widerstände und der bekannten Leistungsfähigkeiten. Auf Grund dieser Zahlen entwarf ich für jede Druckröhre eine Curve, deren Abscissen die Entfernung der Electroden, und deren Ordinaten die entsprechenden Capacitäten bezeichnen. Mit Hülfe dieser Curven liess sich später bei den Widerstandsmessungen des kohlensauren Wassers für irgend eine abgelesene Entfernung direct die Capacität angeben. Letztere, durch den beobachteten Widerstand dividiert, ergibt die Leistungsfähigkeit.

Die Entfernung der Electroden brauchte natürlich nicht jedesmal gemessen zu werden, da die obere feststand; es wurde vielmehr immer nur die Einstellung des obersten Punktes der schwimmenden Electrode auf der Theilung der Röhre bestimmt. Durch Spiegelung des Auges am Quecksilber wurde die Parallaxe vermieden, und war die Schätzung der Zehntelmillimeter noch vollkommen sicher. In Fig. 9 sind die beiden Curven für die Capacitäten gezeichnet.

Schliesslich will ich, um einen Blick in den Gang der Beobachtungen und Rechnungen zu geben, ein Zahlenbeispiel durchführen:

Nach vollendeter Sättigung ergeben die Ablesungen am Manometer einen Druck der eingeschlossenen Luft = 18,711 Atmosphären. Mit Hülfe der bereits p. 634 angeführten Reductionen ergibt sich als Druck, unter dem die Kohlensäure steht: 13,598 Atmosphären. Die Sättigung war erfolgt bei der corrigirten Temperatur $0,80^{\circ}$; aus den beiden letzten Zahlen berechnet sich ein Kohlensäuregehalt von 19,95 ccm in 1 ecm Wasser. Die Widerstandsbestimmung ergab 7687 S.-E., und die Ablesung an der Druckröhre eine Capacität 0,0000762; hieraus folgt die Leistungsfähigkeit $\lambda = 99,1$;

die Temperatur des Bades der Druckröhre war vor der Widerstandsbestimmung $0,80^\circ$, nachher $0,76^\circ$; also die Temperatur während der Bestimmung $0,78^\circ$. Die Temperaturcoefficienten waren durch die Vorversuche bereits mit genügender Genauigkeit ermittelt, um bei den geringen Intervallen die Reduction auf 0° (resp. $12,5^\circ$) vornehmen zu können. Die Zunahme der Leistungsfähigkeit beträgt bei obigem Gehalt 19,95 pro Grad 4,6, sodass sich die Leistungsfähigkeit bei 0° ergibt zu $\lambda_0 = 95,5$.

Bevor ich zur Angabe meiner Resultate gehe, habe ich noch einiger Vorsichtsmassregeln zu gedenken. Die Leistungsfähigkeit des reinen Wassers wird durch Aufnahme von auf anderem Wege nicht mehr bemerkbaren Quantitäten fremder Stoffe bedeutend erhöht; ich musste mich daher vergewissern, ob die beim kohlensauren Wasser beobachteten Leistungsfähigkeiten nur von der Kohlensäure herrühren oder vielleicht von anderen Ursachen. Dies wurde festgestellt, indem ich unter ganz den gleichen Versuchsbedingungen, wie beim kohlensauren Wasser, reines Wasser vornahm. Die Druckröhre wurde nur mit Quecksilber und Wasser gefüllt und die Leistungsfähigkeit bestimmt. Ich erhielt schliesslich ziemlich constant die Werthe 5 bis 6, doch nur mit Anwendung der peinlichsten Sorgfalt und Reinlichkeit. Nachdem die Widerstandscapacitäten der Röhren bestimmt waren, mussten sie Tage lang mit dem ganz reinen Wasser stehen gelassen und von Zeit zu Zeit ausgespült werden, bis letzteres bei Untersuchung im Kohlrausch'schen Widerstandsgefäß Nr. 3 keine Erhöhung der Leistungsfähigkeit mehr zeigte. Dies dauerte wegen der Anwesenheit der platinirten Platinelectrode sehr lange. Die schwimmende Electrode konnte leicht durch Auskochen gereinigt werden.

Das zur Füllung dienende Quecksilber wurde nach sorgfältiger Reinigung öfters in feinen Strahlen durch das Wasser gesandt, fortwährend unter letzterem aufbewahrt und mit ihm zu wiederholten malen heftig geschüttelt, um gewiss alles, was es ans Wasser abgeben konnte, schon vor den Versuchen abzugeben. Ueberhaupt waren alle Körper, mit

denen das Wasser beim Versuch in Berührung kam, schon lange vorher in das gleiche Wasser eingetaucht.

Auch das Glas wird bekanntlich schon bei gewöhnlicher Temperatur von Wasser angegriffen, doch geht dieser Angriff viel zu langsam vor sich, als dass er sich während der Dauer eines Versuches geltend machen könnte. Es folgt ein Beispiel über die Änderung der Leistungsfähigkeit des reinen Wassers in einer der beiden Druckröhren mit der Zeit:

Gleich nach der Füllung	6,90,
nach zwei Stunden	7,34,
nach vier Stunden	9,55,
am anderen Morgen	12,70,
am anderen Abend	15,00.

War mit einer Röhre erreicht, dass in ihr die Leistungsfähigkeit des reinen Wassers um jenes Minimum von 5 bis 6 schwankte, dann begannen die Messungen mit Kohlensäure, wobei natürlich genau dieselben Vorsichtsmassregeln innehalteten wurden.

Was die Dauer eines Versuches anlangt, so nahm ich anfangs höhere Wassersäulen, sodass ich mit derselben Füllung mehrere Sättigungsgrade untersuchen konnte, allein die Sättigung nimmt hierbei sehr lange Zeit in Anspruch. Schliesslich wandte ich jedoch kleine Wassermengen von ca. 7 mm Höhe an, sodass ich mit jeder Füllung nur eine Zahl ermittelte. Auf diese Weise wird man von den einer Füllung etwa anhaftenden Fehlern unabhängiger, und wird ein und dasselbe Wasser nicht viel über eine Stunde benutzt.

Resultate.

In den nachfolgenden Tabellen sind die von mir erhaltenen Resultate zusammengestellt. Die Tabellen II und III enthalten die directen Beobachtungsresultate in der Nähe von 0 und 12,5°. Die entscheidenden Reihen wurden nach zahlreichen vorbereitenden und orientirenden Versuchen in rascher Folge hintereinander gemacht. In den Tabellen bezeichnet:

P den Atmosphärendruck und

T die Temperatur im Moment der Sättigung:

Q den hieraus berechneten Kohlensäuregehalt. Die Zahlen bedeuten die von 1 ccm Wasser aufgenommenen Volumina in Cubikcentimetern, auf 0° und 1 Atmosphäre reducirt.

T_1 die Temperatur während der Widerstandsmessung (Mittel aus den Temperaturen vor und nach der Bestimmung).

λ die electrische Leistungsfähigkeit bei dieser Temperatur.

Die letzte Column enthält die Angabe des Widerstandsgefäßes, in welchem die betreffende Bestimmung vorgenommen wurde.

Aus diesen beiden Zahlenreihen wurden dann die Leistungsfähigkeiten für genau 0 und $12,5^\circ$ berechnet. Die Reduction wurde mit Hülfe der schon durch Vorversuche hinlänglich genau bekannten Temperaturcoefficienten vorgenommen. Die erhaltenen Zahlenwerthe sind in den Tabel- len IV und V zusammengestellt. Q bezeichnet wieder den Kohlensäuregehalt, λ die Leistungsfähigkeit der Lösung.

Tabelle II.

P	T	Q	T_1	λ	Widerstandsgefäß
0,930	0	0,92	0	26,1	Kohlr. Gef. Nr. 3
0,933	0	0,95	0	25,6	"
0,930	0	1,00	0	27,8	"
0,930	0	1,67	0	32,4	"
0,930	0	1,67	0	32,0	"
0,933	0	1,68	0	32,3	"
3,062	0,95	5,10	0,95	52,8	Druckröhre I
3,436	0,95	5,82	0,98	54,8	"
4,336	0,90	7,30	0,93	60,5	"
4,858	0,90	8,17	0,90	62,6	"
5,662	0,95	9,46	0,91	69,4	"
6,374	0,95	10,55	0,94	72,9	"
7,759	0,90	12,55	0,92	77,9	"
7,988	1,00	12,85	0,98	79,0	Druckröhre II
8,398	0,85	13,44	0,80	79,3	Druckröhre I
8,888	0,90	14,09	0,89	83,8	"
9,414	1,05	14,76	1,08	85,1	Druckröhre II
10,243	0,85	15,93	0,84	92,2	"
10,241	0,75	15,98	0,71	89,3	"
10,713	0,85	16,53	0,81	94,6	"
11,871	0,80	17,95	0,78	96,1	"
12,152	0,85	18,29	0,81	96,2	"
13,516	0,85	19,87	0,89	104,3	"
13,598	0,80	19,95	0,78	99,1	"
16,895	0,80	23,34	0,85	110,7	"

Tabelle III.

P	T	Q	T ₁	λ	Widerstandsgefäß
0,930	14,99	0,92	14,99	39,3	Kohlr. Gef. Nr. 3
0,933	13,88	0,95	13,88	39,0	"
0,930	12,35	1,00	12,35	39,3	"
0,930	14,20	1,67	14,20	49,3	"
0,930	11,58	1,67	11,58	44,8	"
0,933	13,65	1,68	13,65	48,0	"
3,329	12,84	3,40	12,82	64,8	Druckröhre I
4,054	12,58	4,15	12,62	73,8	"
4,297	12,78	4,34	12,78	77,8	"
6,254	12,47	6,35	12,47	92,7	"
6,866	12,60	6,78	12,59	96,4	"
7,371	12,26	7,33	12,28	97,0	"
7,739	12,38	7,64	12,35	102,8	"
8,855	12,76	8,44	12,76	108,2	"
9,484	12,68	9,09	12,71	110,2	"
10,219	12,49	9,79	12,52	115,4	"
10,849	12,29	10,38	12,33	114,8	"
11,048	12,50	10,46	12,54	121,5	Druckröhre II
14,632	12,38	13,36	12,38	128,9	"
15,889	12,43	18,89	12,41	133,8	"
15,758	12,29	14,25	12,29	135,4	"
17,593	12,97	15,06	12,95	140,2	"
17,290	12,48	15,17	12,48	136,5	"
17,816	12,28	15,70	12,28	136,6	"
18,502	12,87	15,72	12,88	140,8	"
20,801	12,24	17,75	12,23	148,5	"
23,200	12,10	19,45	12,14	152,5	"
25,259	12,94	20,03	12,91	158,1	"

Tabelle IV.

Q	λ ₀	Q	λ ₀
0,92	26,1	12,85	74,9
0,95	25,6	13,44	75,9
1,00	27,8	14,09	80,0
1,67	32,4	14,76	80,3
1,67	32,0	15,93	88,4
1,68	32,3	15,98	86,1
5,10	50,4	16,53	91,0
5,82	52,2	17,95	92,5
7,30	57,6	18,29	92,5
8,17	59,6	19,87	100,7
9,46	66,1	19,95	95,5
10,55	69,2	23,34	106,8
12,55	74,0		

Tabelle V.

Q	λ _{12,5}	Q	λ _{12,5}
0,92	36,6	9,09	109,4
0,95	37,5	9,79	115,8
1,00	39,5	10,38	115,0
1,67	46,9	10,46	121,3
1,67	46,1	13,36	129,4
1,68	46,4	13,89	134,2
3,40	64,2	14,25	136,3
4,15	73,0	15,06	138,2
4,34	77,0	15,17	136,6
6,35	92,8	15,70	137,6
6,73	96,1	15,72	139,1
7,33	97,7	17,75	144,7
7,64	103,3	19,45	154,2
8,44	102,3	20,03	156,2

Auf Grund der Tabellen sind die beiden Curven in Figur 10 entworfen, welche für 0 und 12,5° die Leistungsfähigkeit

der Lösungen als Function des Kohlensäuregehaltes darstellen. Die Abscissen sind die von 1 ccm Wasser absorbierten Cubikcentimeter Kohlensäure, wenn die Volumina auf 0° und eine Atmosphäre reducirt sind. Die eingeklammerten Zahlen bedeuten den Kohlensäuregehalt in Gewichtsprozenten der Lösung.

Aus den beiden Curven für 0 und 12,5° wurde die Curve für 18° berechnet und ebenfalls in Figur 10 dargestellt, nur aus dem Grunde, um einen directen Vergleich mit den später zu erwähnenden Kohlrausch'schen Leistungsfähigkeiten zu ermöglichen, die sich alle auf 18° beziehen. Die Reduction auf 18° wurde unter der Voraussetzung von Proportionalität zwischen Zunahme des Leistungsvermögens und der Temperatur zwischen 0 und 18° ausgeführt, welche Voraussetzung mit der erforderlichen Genauigkeit zutrifft. (S. auch Tab. VII.) Auch eine Umrechnung der Gehalte an Kohlensäure auf Molekulzahlen in der Volumeneinheit¹⁾ hätte ich auf Grund einer mit meiner Arbeit gleichzeitigen Untersuchung des Hrn. Blümcke, der in unserem Laboratorium das specifische Gewicht des kohlensauren Wassers bis zu Gehalten von ca. 35 Volumina Kohlensäure feststellte, durchführen können; allein der Charakter obiger Curven ändert sich dadurch nicht merklich, und ich unterliess deshalb diese Transformation.

Die in der folgenden Tabelle VI berechneten Temperaturcoefficienten haben eine etwas andere Bedeutung, als in den öfter citirten Kohlrausch'schen Arbeiten, sie bezeichnen nämlich die Zunahme des Leistungsvermögens zwischen 0 und 12,5° in Theilen des Leistungsvermögens bei 18°. Doch wer-

Tabelle VI.

Gehalt an CO_2	Temperaturcoöff.	Gehalt an CO_2	Temperaturcoöff.
0,5	0,0197	8	0,0285
1	207	10	283
2	227	14	274
4	250	18	259
6	276	22	246

1) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 14. 1879.

den sich die der Kohlrausch'schen Definition entsprechenden Temperaturcoefficienten wenig von obigen unterscheiden.

In Figur 10 ist der Verlauf des Temperaturcoeffienten graphisch dargestellt. Die Curve wendet ihre concave Seite der Abscissenaxe zu, zeigt eine sehr starke Krümmung und bei ziemlicher Verdünnung ein Maximum.

Zum Schluss möchte ich noch motiviren, weshalb ich nur bis zum Gehalte von ca. 24 Volumina Kohlensäure gelangt bin, während Wasser bei 0° in der Nähe des Liquefactionsdruckes der Kohlensäure mehr als 30 Volumina der letzteren zu absorbiren vermag. Der Grund liegt darin, dass sich meiner Absicht, bis zum Liquefactionsdruck vorzugehen, ein unvorhergesehenes Hinderniss in den Weg stellte. Das von v. Wroblewsky¹⁾ bereits näher untersuchte Hydrat der Kohlensäure: $\text{CO}_2 + 8\text{H}_2\text{O}$ ist ein fester Körper, der sich nach von Wroblewsky's Angaben unter einem Druck von 25 bis 30 Atmosphären bei plötzlicher Expansion bildet. Allein die obere platinirte Platinelectrode ist dem Entstehen des Hydrates so günstig, dass ich mich meist schon bei 20 Atmosphären, und ohne dass am Manometer eine Expansion beobachtet werden konnte, nicht mehr von demselben befreien konnte. Sobald die obere Electrode ins Wasser tauchte, überzog sie sich mit einer Schicht des festen Hydrats, und damit war eine Widerstandsbestimmung unmöglich. Offenbar röhren diese Erscheinungen von der verdichtenden Wirkung des fein vertheilten Platinmoores auf die Kohlensäure her.

Wiewohl ich im Besitz von Zahlen bin, die sich auf beträchtlich höhere Gehalte, als die angegebenen, beziehen, habe ich mich doch auf die in den Tabellen angegebenen Zahlen beschränkt, da den ersten infolge der eben beschriebenen Missstände einige Unsicherheit anhängt. Doch darf ich aus ihnen wohl mit ziemlicher Sicherheit den Schluss ziehen, dass der Charakter der Curve bis zum Liquefactionsdruck keine wesentliche Änderung erfährt, und insbesondere, dass kein Maximum mehr einzutreten scheint.

Sollte es mir gelingen, durch eine Abänderung meiner

1) v. Wroblewsky, Wied. Ann. 17. p. 108 ff. 1882.

Methode die obigen Missstände zu beseitigen, so werde ich die letzterwähnten Verhältnisse noch einer genaueren Untersuchung unterwerfen.

Schlussfolgerungen.

1. Aus obigen Zahlen ist zunächst ersichtlich, dass die Lösung von Kohlensäure in Wasser zu den schlechtestleitenden Electrolyten gehört, die bis jetzt bekannt sind. Die einzigen über diesen Gegenstand vorliegenden Angaben sind zwei kurze Notizen in Kohlrausch's Abhandlungen.¹⁾ Hr. Prof. Kohlrausch hatte die Güte, mir mitzutheilen, dass er beim blossem Ueberleiten von Kohlensäure über sein ganz reines Wasser die Leistungsfähigkeit 20 fand, was mit meinen Zahlen in gutem Einklang steht. Um von den Grössenverhältnissen einen Begriff zu geben, will ich bemerken, dass die höchsten von mir beobachteten Leistungsfähigkeiten etwas über 150 gehen, während unser Brunnenwasser ein Leistungsvermögen von ca. 400 besitzt.

2. Was die chemische Constitution des kohlensauren Wassers anlangt, so hat man dasselbe häufig als eine Lösung der hypothetischen Kohlensäure H_2CO_3 in Wasser angesehen, wohl veranlasst durch manche, dasselbe als Säure charakterisirende Eigenschaften (es röhrt z. B. Lackmuspapier). Aus meinen Zahlen darf jedoch mit Sicherheit geschlossen werden, dass diese Anschauung unrichtig ist. Denn nach dem Satz von der unabhängigen Wanderung der Ionen²⁾ lässt sich der untere Grenzwerth, dem sich die Leistungsfähigkeit nach obiger Annahme mit wachsender Verdünnung nähern müsste, approximativ aus der molecularen Leistungsfähigkeit der einzelnen Componenten berechnen. Für letztere stellt Kohlrausch folgende Zahlen auf:

$$\frac{1}{2}(H_2) : u \cdot 10^{10} = 166\,000$$

$$\frac{1}{2}(CO_3) : v \cdot 10^{10} = 36\,000.^3)$$

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 10 u. 11. 1876. Wied. Ann. 6. p. 191. 1879.

2) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 168. 1879.

3) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 177. 1879.

Hieraus ergibt sich durch Addition die molecularare Leitungs-fähigkeit von:

$$\frac{1}{3}(\text{H}_2\text{CO}_3) : \lambda \cdot 10^{10} = 202\,000,$$

also ein Werth, der meine höchsten Leitungsvermögen um mehr als das 1000fache übertrifft.

3. Eine Änderung des Leitungsvermögens des kohlen-sauren Wassers durch Druckänderung konnte nicht festgestellt werden. Falls eine solche existirt, fällt sie innerhalb meiner Versuchfehler. Dies Resultat liefert einen Beitrag zur Beantwortung der Frage, ob die Kohlensäure in Lösung als gasförmig oder flüssig anzusehen ist. Wenn man erwägt, wie sehr fast alle physikalischen Eigenschaften der Gase vom Druck abhängig sind, so wird obige Thatsache einen neuen Beleg für die schon öfter aufgestellte Behauptung bilden, dass die Kohlensäure in Lösung flüssig ist.

4. Als kritische Temperatur der Kohlensäure wird $30,9^{\circ}$ angegeben. Ueber dieser Temperatur soll Kohlensäure nur in gasförmigem Zustande möglich sein, also müsste, wenn wir das kohlensaure Wasser unter der kritischen Temperatur als blosse Mischung von flüssiger Kohlensäure mit Wasser ansehen, beim Durchgang durch die kritische Temperatur die sich in Gas verwandelnde Kohlensäure austreten, oder falls sie sich als solches noch in Wasser löst, müsste wenigstens in diesem Moment im Verlaufe des Leitungsvermögens irgend eine Unregelmässigkeit sich zeigen.

Durch verschiedene Versuche überzeugte ich mich, dass weit über der kritischen Temperatur noch Kohlensäure in Wasser gelöst wird. Zu dem Zweck wurde das mit Wasser gefüllte Kohlrausch'sche Widerstandsgefäß Nr. 3 in ein Wasserbad gesetzt, auf eine bestimmte Temperatur gebracht und bei dieser Temperatur durch Einleiten von Kohlensäure mit letzterer gesättigt, was am Constantwerden des galvanischen Widerstandes sichtbar war. Dann wurde mit fallender Temperatur die Leitfähigkeit von Zeit zu Zeit bestimmt.

Zuvor hatte ich mich durch eine Reihe von Versuchen überzeugt, dass Wasser, auf eine noch höhere als obige Sättigungstemperatur gebracht und ohne Kohlensäureaufnahme wieder abgekühlt, seine ursprüngliche Leitfähigkeit wieder

annahm, sodass also durch die Erwärmung keine fremden Stoffe aus den Platinelectroden ins Wasser übergegangen waren, oder Glassubstanz sich aufgelöst hatte.

In folgender Tabelle ist eine solche Versuchsreihe angegeben.

Tabelle VII.
Wasser, bei $39,3^{\circ}$ mit CO_2 gesättigt.

T	λ beob.	λ ber.	T	λ beob.	λ ber.
34,9	40,2	39,7	17,2	26,9	26,9
28,8	35,3	34,8	11,6	23,1	23,2
22,4	30,9	30,4	0	15,4	15,4

Hier ist T die Temperatur, λ die Leitfähigkeit. In der dritten Reihe sind die Leitfähigkeiten berechnet unter der Voraussetzung von Proportionalität zwischen dem Zuwachs der Leitfähigkeit und Temperatur. Sie ist hier nur angefügt, weil ich mich auf p. 645 darauf bezog. Bei Temperaturen von 0 bis 18° ist die Proportionalität vollständig.

Durch den kritischen Punkt geht die Leitfähigkeit ohne eine auffallende Erscheinung hindurch. Hieraus darf wohl der Schluss gezogen werden, dass man das kohlensäure Wasser nicht als eine Mischung von flüssiger Kohlensäure und Wasser, sondern als eine chemische Verbindung anzusehen habe.

Obiger bei $39,3^{\circ}$ gesättigten Lösung entspricht, wenn man nach den Curven in Figur 10 aus der Leitfähigkeit 15,4 bei 0° auf den Kohlensäuregehalt rückwärts schliesst, ein Gehalt von etwa 0,2 ccm Kohlensäure pro Cubikcentimeter Wasser.

5. Der Verlauf der Leitfähigkeit weitaus des grössten Theiles der bis jetzt untersuchten Electrolyte ist vom reinen Wasser an gerechnet bis zu Prozentgehalten, die den höchsten bei mir vorkommenden entsprechen, eine fast lineare Function des letzteren. Für eine Gruppe von Säuren hat Kohlrausch¹⁾ bereits auf ihr in dieser Hinsicht ab-

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 159. p. 268. 1876.

weichendes Verhalten hingewiesen. Es zeigen nämlich Oxal-, Wein- und Essigsäure eine auffallende Krümmung in den Curven ihrer Leitungsfähigkeit bereits bei sehr starken Verdünnungen, und Kohlrausch spricht an citirter Stelle die Vermuthung aus, dass dieser Umstand mit dem Kohlenstoffgehalt obiger Säuren in Verbindung stehe. Der Verlauf der Curven für kohlensaures Wasser bietet ganz die gleichen Erscheinungen dar: das rapide, fast senkrechte Ansteigen bei den grössten Verdünnungen und die aussergewöhnliche Concavität der Curven nach unten.

Auch das anfängliche Ansteigen der Temperaturcoefficienten ist allen diesen Lösungen gemeinschaftlich.

In dieser Uebereinstimmung liegt also eine Bestätigung obiger Vermuthung. (Allerdings zeigt auch wässerige Ammoniaklösung einen analogen Verlauf).

6. Ein Maximum des Leistungsvermögens vor dem Condensationsdruck der Kohlensäure scheint bei 0° für kohlensaures Wasser nicht einzutreten und sonach überhaupt nicht zu existiren, da nach Verflüssigung der Kohlensäure eine weitere Absorption durch das kohlensaure Wasser nicht mehr stattfindet.

7. Die obigen Punkte möchte ich zum Schlusse in den Satz zusammenfassen: Die Lösung von Kohlensäure in Wasser ist, soweit die Erscheinungen der electrischen Leitungsfähigkeit einen Schluss zulassen, eine chemische Verbindung von ähnlicher Constitution wie die kohlenstoffhaltigen Körper Oxalsäure, Weinsäure und Essigsäure.

Auf allgemeinere Schlussfolgerungen mich weiter einzulassen, halte ich zum mindesten für verfrüht, da das auf dem einschlägigen Gebiet bis jetzt vorliegende Material noch zu dürftig ist, und weitere experimentelle Untersuchungen abzuwarten sind.

Zum Schlusse fühle ich mich verpflichtet, dem Chef unseres Laboratoriums, Hrn. Professor Dr. von Beetz, für die Liberalität, mit der er das Zustandekommen dieser Arbeit ermöglichte, meinen besten Dank auszusprechen.

VII. *Ueber den electrischen Widerstand des Mikrophonkohlencontactes während der Bewegung;*
von Otto Bockmann.

(Dissertation.)

(Aus dem phys. Laboratorium der Techn. Hochschule zu München.)

(Hierzu Taf. VIII Fig. 1-3.)

Resultate, welche ich bei einer Untersuchung über den electrischen Widerstand der Kohlencontacte, während sich dieselben in Ruhe befinden, in Bezug auf seine Abhängigkeit von Druck und Intensität des durchgehenden Stromes erhielt, wurden durch das Erscheinen einer Abhandlung von S. Bidwell¹⁾ bestätigt und veranlassten mich, auf die Sache näher einzugehen und das Verhalten des electrischen Widerstandes von Kohlencontacten ins Auge zu fassen unter Bedingungen, wie sie beim Mikrophon in Anwendung kommen. Bei demselben handelt es sich nämlich nicht nur um den Widerstand, der auftritt, wenn der Kohlencontact durch Erschütterungen, Sprechen etc. verändert, d. h. im allgemeinen in Bewegung versetzt wird. Die Factoren, die hier auftreten, sind ausser dem Anfangsdruck und der Intensität des Stromes, der durch den Contact geht, auch noch die Stärke der Erschütterung und die Anzahl der damit verbundenen Schwingungen, also noch Tonstärke und Tonhöhe.

Die Fragen, um die es sich hier also handelt, sind folgende:

- 1) Wie verhält sich der Widerstand des Kohlencontactes während der Ruhe zu dem, der vorhanden ist, während sich der Contact in Bewegung befindet, vorausgesetzt, dass die Intensität des durchgehenden Stromes dieselbe ist?
- 2) Kehrt der ursprüngliche Ruhewiderstand wieder zurück, wenn die Bewegung aufhört?
- 3) Wie ist der Widerstand während der Bewegung abhängig vom Anfangsdruck, bei gleicher Stromintensität und gleicher Tonstärke?
- 4) Wie hängt der Widerstand während der Bewegung

1) S. Bidwell, Proc. of the Roy. Soc. 35. p. 1. 1883.

ab von der Intensität des durchgehenden Stromes, bei gleichem **Anfangsdruck** und gleicher Tonstärke?

5) Entspricht derselben Intensität auch derselbe Widerstand, und kehrt nach stattgefunder Stromvermehrung und darauf folgender Stromverminderung der ursprüngliche Widerstand zurück?

6) Wie ist die Abhängigkeit des Widerstandes von der Tonstärke bei gleicher Stromintensität und gleichbleibendem **Anfangsdruck**?

7) Kehrt nach Vermehrung der Tonstärke der ursprüngliche Widerstand wieder, wenn auch die ursprüngliche Tonstärke wieder hergestellt wird?

8) Wie ist das Verhalten des Widerstandes der Bewegung gegenüber der Tonhöhe?

Um eine möglichst genaue Lösung dieser Fragen herbeiführen zu können, hielt ich mich in Bezug auf die Größen des Druckes und der Intensität des Stromes, der durch den Contact geht, innerhalb der Grenzen, wie sie etwa in der Wirklichkeit beim Mikrophon in Betracht kommen können. Ich suchte meine Versuche überhaupt soviel als möglich den Bedingungen der Wirklichkeit anzupassen und bediente mich dazu folgenden Apparates¹⁾:

Auf der Mitte der Metallplatte eines Telephones wurde mittelst Siegellack der eine Kohlentheil gut leitend befestigt. Siegellack nahm ich aus dem Grunde, weil er ein rasches Befestigen ermöglicht und von der Metallplatte sowohl, wie von dem Kohlentheil leicht wieder zu entfernen ist. Dieses Telefon wurde aufrecht an einem Holzklotz mit Banden so festgeschraubt, dass senkrecht über dem Kohlentheil eine Mikrometerschraube befestigt werden konnte, an welcher durch Andrehen und nochmaliges Befestigen mit Siegellack der andere Kohlentheil ebenfalls gut leitend angebracht werden konnte. Die Mikrometerschraube diente zur Variirung des **Anfangsdruckes**, und es war mit derselben möglich, die

1) Zur Ergänzung möchte ich noch hinzufügen, dass ich aus einer grossen Anzahl der mannichfachsten Methoden nur die mit dem Telefon hier beschrieb, weil sie mir von allen die gleichmässigsten Resultate lieferte.

genauesten Einstellungen hervorzubringen. Die Zuleitung des durchgehenden Stromes geschah an der Mikrometerschraube mittelst einer Klemmschraube und an der Metallplatte durch Auflegen eines Kupferdrahtes, welcher durch den Holzring fest aufgepresst wurde, der die Metallplatte hielt. Der Kohlentheil, der sich auf der Platte befand, hatte cylindrische Form, war 10 mm hoch und hatte einen Durchmesser von 8 mm. Der an der Mikrometerschraube sich befindende Kohlentheil war aus einem Cylinder von eben solchem Durchmesser gedreht, hatte eine Höhe von 15 mm und war an dem Ende, das den Contact bildete, kegelförmig zugespitzt. Ich will gleich an dieser Stelle bemerken, dass ich zu meinen sämmtlichen hier folgenden Versuchen die Kohle vor jeder Versuchsreihe aufs sorgfältigste polirte, nicht nur die Platte, sondern auch die Spitze; hierzu eignet sich ganz besonders die Kohle, wie sie Ader zu seinen Mikrophenen verwendet, da dieselbe sehr hart und dabei sehr homogen ist. Das Poliren geschah mit Smirgelpapier; erst wurde weniger feines und darauf folgend immer feineres verwendet. Versuche, die ich mit nicht polirter, sondern einfach glatt gefeilter Kohle anstellte, gaben äusserst unsichere Resultate. Sie vermehren die bei polirter Kohle schon sehr grosse Empfindlichkeit, sodass nur irgendwie brauchbare Resultate nur durch Beobachtungen während der Nacht erhalten werden konnten, da man, wenn man unter verhältnissmässig kleinem Anfangsdruck arbeiten will, von der allergeringsten Erschütterung in einem so hohen Grade abhängig ist, dass man nur mit der grössten Mühe zu einem einigermassen brauchbaren Resultat kommen kann. Ausserdem habe ich die Bemerkung gemacht, dass der Anfangswiderstand nur langsam, nach Aufhören der Bewegung, zurückkehrt, während dies bei polirter Kohle sofort der Fall ist, und dass, wie wir später sehen werden, der Widerstand während der Bewegung, nicht wie bei polirten Contacten, kleiner ist, wie in der Ruhe, sondern im Gegentheil grösser. Eine übereinstimmende Regelmässigkeit ist bei Versuchen mit unpolirter Kohle kaum zu erzielen, während dies bei polirter Kohle bei weitem leichter möglich ist. Das Verhalten

der unpolirten Kohle ist im allgemeinen analog zu dem der polirten, die Aenderungen und durch Zufälligkeiten verursachten Schwankungen im Widerstand bewegen sich aber innerhalb solcher Grenzen, die sie für feinere Messungen absolut ungeeignet machen.

Durch eine grosse Anzahl von Versuchen, die alle übereinstimmende Resultate lieferten, glaube ich, wenigstens für den Fall, dass die Kohle polirt ist, die Gesetzmässigkeiten nachweisen zu können.

Der obere Kohlentheil, der mittelst der Mikrometer-schraube verstellbar war, befand sich dem unteren gegenüber in Ruhe; die Bewegung des Theiles, der sich auf der Platte befand, wurde dadurch hervorgebracht, dass durch die Draht-spirale in dem Telephon ein Strom geschickt wurde, der durch einen Stromunterbrecher unterbrochen werden konnte. Dadurch wurde die Metallplatte bald angezogen und bald wieder losgelassen, sodass ein regelmässiges Vibiren des unteren Kohletheils gegen den oberen hervorgebracht wurde. Das Unterbrechen selbst geschah mittelst einer Helmholtz-schen Unterbrechungsstimmgabel; es standen mir drei Stimm-gabeln zur Verfügung, die das Subcontra, das grosse und das kleine c angaben.

Die Messungen der Widerstände wurden nach der Wheatstone'schen Methode ausgeführt; die Widerstände, die während der Bewegung gemessen wurden, waren eigent-lich die Mittelwerthe aus einem grösseren und einem klei-neren Widerstande, als der ursprüngliche, doch folgten diese so rasch aufeinander, dass sie im Galvanometer als gleich-bleibender Widerstand erschienen. Das Galvanometer nach Prof. Kohlrausch, von E. Hartmann & Cie. in Würzburg eigens zu dieser Arbeit bezogen, besitzt eine sehr gute Dämpfung. Der Magnet macht sechs bis acht Schwingungen; der Umfang des Messingovales beträgt 156,9 mm. Hierauf sind zwei Drähte in sechs Lagen übereinander zu $2 \times 65\%$, Windungen gewickelt. Die Drahtstärke = 1 mm. Die Wider-stände $A_1 E_1 = 0,253$ S.-E. und $A_2 E_2 = 0,254$ S.-E. Der Um-fang dieser Wicklung = 201,2 mm. Hierauf sind zwei Drähte von 0,3 mm Durchmesser in 14 Lagen übereinander

zu $2 \times 393 \frac{1}{4}$ Umwindungen gewickelt. Der Widerstand $A_1 E_1 = 21,9$, $A_2 E_2 = 20,6$ S.-E. Die Ablesungen geschahen mittelst Scala und Fernrohr; die gefundenen Widerstände sind in Siemenseinheiten ausgedrückt. Die Stimmgabel wurde mit zwei Grove'schen Elementen getrieben; ein Commutator war so angebracht, dass jederzeit an demselben schon erwähnten Galvanometer die Stärke des treibenden Stromes abgelesen werden konnte. Hierdurch war es ermöglicht, durch vorheriges Fixiren eines gewissen Galvanometerausschlages, durch einen angefügten Rheostaten mit einem Rheochord die Stromstärke und damit die Tonstärke constant zu halten.

Eine gleiche Einrichtung befand sich bei dem Daniell'schen Element, welches den Strom lieferte, der durch den Contact ging. Durch diese beiden Commutatoren war also die Möglichkeit geboten, die Tonstärke und Intensität des durch die Contacte gehenden Stromes genau zu reguliren; bei den nachfolgenden Versuchen erfolgte vor und nach jeder Ablesung eines Widerstandes eine genaue Controle.

Vor der Unterbrechungsstimmgabel befand sich ein Commutator, der dazu diente, den Strom entweder durch die Spirale des Telephons zu schicken oder denselben, wenn es eine Regulirung des Unterbrechers oder Auswechslung der Stimmgabel erforderte, nur durch die Spirale des Electromagnets zu senden, der die Stimmgabel in Bewegung setzte.

So wurde auf diese Weise, um keine unregelmässige Contactbewegungen und dadurch veranlasste Störungen zu bekommen, jedesmal die Stimmgabel erst für sich ordentlich ins Schwingen gebracht und dann erst der Strom gleichzeitig durch das Telefon geschickt.

Die Resultate meiner Untersuchungen, die ich auf die angegebene Art und Weise erhielt, seien nun hier mitgetheilt.

I. Abhängigkeit vom Anfangsdruck, dem der Contact ausgesetzt ist.

Das Verfahren war folgendes:

Der Widerstand des Contactes in der Ruhe wurde gemessen, nachdem zuerst die Intensität des durch denselben

gehenden Stromes abgelesen war. Darauf wurde die Stimmgabel für sich in Bewegung gesetzt; war dieselbe richtig im Schwingen, so wurde durch die Umschaltung am Commutator der Strom auch durch das Telephon geschickt, und jetzt sowohl die Stärke des Stromes, der die Stimmgabel trieb, gemessen, wie auch die Intensität des durch den Contact gehenden Stromes regulirt. Sodann geschah die Widerstandsbestimmung des Contactes, worauf die Bewegung unterbrochen wurde und eine abermalige Messung des Widerstandes während der Ruhe nach der Bewegung, nach demselben Verfahren, wie die Bestimmung des Widerstandes vor der Bewegung, stattfand. Diese Bestimmungen vor, während und nach der Bewegung wiederholten sich bei jeder einzelnen Messung. Hier wurde, wie es die Tabelle I zeigt, durch Anpressen der Kohlenspitze vermittelst der Mikrometerschraube an die Kohlenplatte der Druck jedesmal vermehrt, also der Widerstand vermindert. Bei neun verschiedenen Anfangsdrucken ergaben sich folgende Resultate:

Stimmgabel U_t .

Tabelle I.

Widerstand in S.-E. vor der Bewegung	Widerstand in S.-E. während der Bewegung	Widerstand in S.-E. nach der Bewegung
13,697	12,831	13,697
11,459	11,099	11,459
10,367	10,182	10,367
9,455	9,342	9,455
8,939	8,908	8,939
8,587	8,570	8,587
8,332	8,298	8,332
7,986	7,970	7,986
7,637	7,621	7,637

Die Scala war vom Nullpunkt aus nach der einen Seite mit rothen, nach der anderen Seite mit schwarzen Zahlen versehen; hier gab die Intensität des durch den Contact gehenden Stromes einen Ausschlag von roth 12 mm; die Intensität wurde bei sämmtlichen Versuchen auf diesen Theilstrich regulirt. In den Stromkreis des Daniell'schen Elementes war ein Widerstand von 60 S.-E. eingeschaltet. Der bekannte

Widerstand in der Wheatstone'schen Combination betrug 10 S.-E. Die Stimmgabel wurde mit zwei Grove'schen Elementen getrieben; das Galvanometer gab einen Ausschlag von schwarz 10 mm, der ebenfalls für diese ganze Tabelle immer wieder hergestellt wurde. (S. Tab. I p. 656.)

Aus der Tabelle I ist ersichtlich, dass bei gleicher Tonstärke und gleicher, durch den Contact gehender Stromintensität der Widerstand sowohl in der Ruhe, wie während der Bewegung, durch Vermehrung des Anfangsdruckes abnimmt. Ferner, dass der Widerstand während der Bewegung kleiner ist, als der in der Ruhe, und dass diese Differenz um so grösser ist, je kleiner der Anfangsdruck ist. Ausserdem kehrt nach jedesmaligem Aufhören der Bewegung der Widerstand zu dem Werthe zurück, den er vor der Bewegung eingenommen hatte. Die in Fig. 1 dargestellte Curve zeigt die Abnahme der Differenz des Widerstandes während der Ruhe und des Widerstandes während der Bewegung bei zunehmendem Druck, wie auch das Abnehmen des Widerstandes bei zunehmendem Anfangsdruck im allgemeinen. Als Abscissen ist in gleichen Abständen die Anzahl der Beobachtungen und als Ordinaten sind die sich jedesmal ergebenen Widerstände aufgetragen.

II. Abhängigkeit von der Stärke des Stromes, der durch den Contact geht.

In den Stromkreis des Daniell'schen Elementes wurde ein Siemens'scher Stöpselrheostat angebracht und mit demselben durch Einschalten von Widerständen die Intensität des durch den Contact gehenden Stromes vermindert. Die Messungen der Widerstände geschahen, wie bei der vorhergehenden Tabelle, jedesmal vor, während und nach jeder Bewegung, auch wurde die Tonstärke jedesmal auf derselben Höhe gehalten; das Galvanometer gab den Ausschlag schwarz 10 mm. Getrieben wurde die Stimmgabel mit zwei Grove'schen Elementen, der bekannte Widerstand in der Wheatstone'schen Combination war 10 S.-E.

Der Deutlichkeit halber will ich die Resultate, die ich von drei Stimmgabeln erhielt, hier angeben:

Stimm gabel U_1 .

Tabelle II.

S.-E.	vor	während	nach	S.-E.	vor	während	nach
0.	7,668	7,544	7,731	26.	8,769	8,629	8,769
1.	7,857	7,668	7,825	27.	8,779	8,633	8,779
2.	7,920	7,762	7,920	28.	8,797	8,637	8,797
3.	7,986	7,857	7,986	29.	8,804	8,664	8,804
4.	8,083	7,921	8,083	30.	8,815	8,674	8,815
5.	8,149	7,986	8,149	31.	8,822	8,692	8,832
6.	8,215	8,050	8,215	32.	8,832	8,692	8,832
7.	8,265	8,116	8,265	33.	8,832	8,692	8,832
8.	8,315	8,165	8,315	34.	8,832	8,692	8,832
9.	8,349	8,215	8,349	35.	8,840	8,699	8,840
10.	8,381	8,248	8,381	36.	8,850	8,709	8,850
11.	8,450	8,315	8,440	37.	8,868	8,727	8,868
12.	8,484	8,349	8,484	38.	8,868	8,727	8,868
13.	8,519	8,382	8,519	39.	8,868	8,727	8,868
14.	8,558	8,416	8,553	40.	8,886	8,744	8,886
15.	8,570	8,433	8,587	41.	8,886	8,744	8,886
16.	8,605	8,467	8,605	42.	8,903	8,762	8,903
17.	8,622	8,484	8,629	43.	8,903	8,762	8,903
18.	8,657	8,526	8,657	44.	8,909	8,769	8,909
19.	8,674	8,556	8,674	45.	8,909	8,769	8,909
20.	8,692	8,553	8,692	46.	8,909	8,769	8,909
21.	8,711	8,570	8,711	47.	8,922	8,779	8,922
22.	8,727	8,587	8,727	48.	8,922	8,779	8,922
23.	8,734	8,594	8,734	49.	8,922	8,779	8,922
24.	8,744	8,605	8,744	50.	8,940	8,797	8,940
25.	8,761	8,622	8,761				

Stimm gabel U_1 .

Tabelle III.

S.-E.	vor	während	nach	S.-E.	vor	während	nach
0.	7,854	7,925	7,954	15.	8,762	8,674	8,779
1.	8,083	7,937	8,083	16.	8,797	8,692	8,797
2.	8,149	8,018	8,149	17.	8,815	8,727	8,815
3.	8,231	8,100	8,231	18.	8,832	8,744	8,832
4.	8,315	8,182	8,315	19.	8,850	8,762	8,850
5.	8,382	8,248	8,382	20.	8,868	8,797	8,885
6.	8,433	8,315	8,433	21.	8,903	8,815	8,903
7.	8,484	8,365	8,484	22.	8,903	8,815	8,903
8.	8,519	8,416	8,519	23.	8,922	8,832	8,922
9.	8,568	8,467	8,568	24.	8,940	8,850	8,940
10.	8,605	8,519	8,622	25.	8,940	8,850	8,940
11.	8,657	8,553	8,657	26.	8,940	8,868	8,940
12.	8,692	8,587	8,692	27.	8,957	8,868	8,957
13.	8,727	8,622	8,727	28.	8,968	8,886	8,976
14.	8,744	8,657	8,744	29.	8,976	8,886	8,976

S.-E.	vor	während	nach	S.-E.	vor	während	nach
30.	8,993	8,922	9,011	41.	9,157	9,084	9,157
31.	9,011	8,940	9,048	42.	9,157	9,084	9,157
32.	9,048	8,958	9,048	43.	9,157	9,102	9,176
33.	9,048	8,993	9,084	44.	9,176	9,102	9,176
34.	9,084	9,011	9,084	45.	9,176	9,102	9,176
35.	9,102	9,030	9,102	46.	9,223	9,121	9,223
36.	9,121	9,048	9,121	47.	9,223	9,121	9,223
37.	9,121	9,048	9,121	48.	9,223	9,121	9,223
38.	9,131	9,066	9,131	49.	9,223	9,121	9,223
39.	9,131	9,066	9,131	50.	9,223	9,121	9,223
40.	9,157	9,084	9,157				

Stimmgabel U_{t_2} .

Tabelle IV.

S.-E.	vor	während	nach	S.-E.	vor	während	nach
0.	8,018	7,841	8,018	26.	9,212	9,048	9,212
1.	8,132	7,937	8,132	27.	9,231	9,048	9,231
2.	8,215	8,050	8,215	28.	9,249	9,066	9,249
3.	8,315	8,149	8,315	29.	9,268	9,084	9,268
4.	8,399	8,231	8,399	30.	9,280	9,102	9,305
5.	8,467	8,315	8,484	31.	9,305	9,121	9,305
6.	8,553	8,382	8,553	32.	9,305	9,139	9,324
7.	8,622	8,450	8,622	33.	9,342	9,139	9,342
8.	8,674	8,526	8,674	34.	9,342	9,157	9,361
9.	8,727	8,587	8,744	35.	9,361	9,157	9,361
10.	8,779	8,622	8,797	36.	9,361	9,157	9,361
11.	8,882	8,674	8,882	37.	9,361	9,157	9,361
12.	8,885	8,727	8,903	38.	9,361	9,157	9,361
13.	8,941	8,762	8,941	39.	9,380	9,175	9,380
14.	8,957	8,797	8,957	40.	9,380	9,175	9,380
15.	8,994	8,832	8,994	41.	9,380	9,194	9,380
16.	9,011	8,850	9,011	42.	9,398	9,194	9,398
17.	9,030	8,868	9,048	43.	9,398	9,194	9,398
18.	9,066	8,903	9,066	44.	9,398	9,194	9,398
19.	9,084	8,939	9,102	45.	9,417	9,212	9,417
20.	9,121	8,957	9,121	46.	9,417	9,212	9,417
21.	9,157	8,975	9,157	47.	9,417	9,212	9,417
22.	9,157	8,975	9,157	48.	9,417	9,212	9,417
23.	9,175	8,993	9,175	49.	9,417	9,212	9,417
24.	9,194	9,011	9,194	50.	9,417	9,212	9,417
25.	9,212	9,030	9,212				

Die Tabellen II, III und IV zeigen, dass bei gleichbleibendem Anfangsdruck und gleicher Tonstärke der Widerstand während der Bewegung sowohl, wie der Widerstand in der Ruhe bei abnehmender Stromintensität zunimmt, und dass der Ruhewiderstand wieder eintritt. Fig. 2 zeigt den

Verlauf der Curve. Die Abscissen bilden die in den Stromkreis des Daniell'schen Elementes nacheinander eingeschalteten Widerstände in S.-E., während die Ordinaten die entsprechenden Contactwiderstände angeben. Ausserdem zeigen die beiden nebeneinander herlaufenden Curven deutlich, dass der Widerstand während der Bewegung kleiner ist, als während der Ruhe.

Um zu zeigen, dass derselben Intensität des Stromes bei gleichbleibendem Anfangsdruck und gleicher Tonstärke auch derselbe Widerstand entspricht, mögen die drei folgenden Tabellen dienen.

Stimmgabel U_{t_2} .

Tabelle V.

S.-E.	vor	während	nach
79.	9,436	9,212	9,436
36.	9,824	9,102	9,342
21.	9,157	8,922	9,157
14.	8,975	8,779	9,194
9.	8,709	8,519	8,708
14.	8,975	8,779	8,975
21.	9,121	8,922	9,139
36.	9,305	9,125	9,324
79.	9,417	9,194	9,417

Stimmgabel U_{t_1} .

Tabelle VI.

S.-E.	vor	während	nach
79.	9,417	9,305	9,417
36.	9,805	9,175	9,824
21.	9,121	8,993	9,139
14.	8,940	8,815	8,940
9.	8,692	8,553	8,692
14.	8,940	8,797	8,940
21.	9,102	8,993	9,121
36.	9,286	9,157	9,305
79.	9,398	9,268	9,398

Stimmgabel U_{t_1} .

Tabelle VII.

S.-E.	vor	während	nach	S.-E.	vor	während	nach
79.	9,417	9,249	9,417	14.	8,957	8,797	8,957
36.	9,305	9,139	9,305	21.	9,139	8,975	9,139
21.	9,121	9,975	9,121	36.	9,268	9,121	9,268
14.	8,939	8,762	8,939	79.	9,380	9,231	9,380
9.	8,744	8,570	8,762				

Von einem schwachen Strom ausgehend, wurde derselbe bis zu einer gewissen Grenze anwachsen und dann zu seinem ursprünglichen Werthe wieder abnehmen gelassen. Dies wurde dadurch bewirkt, dass in dem zu Anfang erwähnten Rheostaten, der in den Strom eingeschaltet ist, welcher durch den Contact selbst geht, ein relativ grosser Widerstand her-

gestellt wurde. Dieser Widerstand wurde nach und nach vermindert und dann ebenso bis zu einer ursprünglichen Grösse wieder hergestellt. Ausser denselben eingeschalteten Rheostatenwiderständen wurde auch durch Ablesung am Galvanometer durch einen Rheochord die Intensität auf den ursprünglichen Werth ausgeglichen.

Aus diesen drei Tabellen V, VI und VII erhellit wohl zur Genüge, dass einer gewissen Stromstärke ein gewisser Contactwiderstand entspricht, der regelmässig, ob der Strom nun vermehrt oder vermindert wird, vorausgesetzt, dass der Anfangsdruck derselbe bleibt, wieder eintritt.

III. Abhängigkeit von der Stromstärke.

Bei gleichbleibendem Anfangsdruck und gleichbleibender Stromintensität handelt es sich auch noch um die Stärke, mit welcher der eine Kohlentheil gegen den anderen in Bewegung gesetzt wird; dies wurde auf folgende Weise zu ermitteln gesucht:

In den Stromkreis, der die Stimmgabeln in Bewegung setzte, also hinter die beiden Grove'schen Elemente, wurde ein Rheostat eingefügt und durch Einschaltung von Widerständen der die Stimmgabeln treibende Strom geschwächt, mithin die Tonstärke vermindert, da ja hierdurch auch der Strom geringer wurde, der durch das Telephon ging, und dadurch die in demselben verursachten Schwingungen kleiner wurden. Sonst geschahen die Messungen wie bei den vorhergehenden Versuchen; der Anfangsdruck blieb derselbe, und ebenso wurde die Intensität des durch den Contact gehenden Stromes immer auf gleichem Niveau gehalten. Hinter dem Daniell'schen Element war ein Widerstand von 210 S.-E. eingeschaltet; der bekannte Widerstand war in der Wheatstone'schen Combination = 10 S.-E. Nachdem eine gewisse Grenze erreicht war, wurde der Strom wieder in demselben Maasse verstärkt, wie er vorher vermindert worden, um zu prüfen, ob eine Verstärkung oder Schwächung der Tonstärke in irgend einer Weise verändernd auf den ursprünglichen Widerstand der Ruhe einwirkt.

Die drei Stimmgabeln gaben folgende Resultate:

Stimmgabel U_{t_1} .

Tabelle VIII.

S.-E.	vor	während	nach
0.	10,618	10,471	10,618
10.	10,618	10,471	10,618
20.	10,618	10,492	10,618
30.	10,618	10,492	10,618
40.	10,618	10,513	10,618
50.	10,618	10,513	10,618
60.	10,618	10,534	10,618
70.	10,618	10,534	10,518
80.	10,618	10,534	10,618
90.	10,618	10,534	10,618
100.	10,618	10,555	10,618
150.	10,618	10,576	10,618
200.	10,618	10,598	10,618
150.	10,618	10,576	10,618
100.	10,618	10,555	10,618
90.	10,618	10,534	10,618
80.	10,618	10,534	10,618
70.	10,618	10,534	10,618
60.	10,618	10,534	10,618
50.	10,618	10,534	10,618
40.	10,618	10,534	10,661
30.	10,682	10,534	10,682
20.	10,682	10,534	10,682
10.	10,682	10,534	10,682
0.	10,682	10,534	10,682

Stimmgabel U_{t_1} .

Tabelle IX.

S.-E.	vor	während	nach
0.	10,661	10,543	10,661
10.	10,661	10,555	10,661
20.	10,661	10,555	10,661
30.	10,661	10,576	10,661
40.	10,661	10,576	10,661
50.	10,661	10,576	10,661
60.	10,661	10,597	10,661
70.	10,661	10,597	10,661
80.	10,640	10,597	10,640
90.	10,640	10,597	10,640
100.	10,640	10,597	10,618
150.	10,618	10,597	10,618
200.	10,618	10,597	10,661
150.	10,640	10,618	10,640
100.	10,640	10,597	10,640
90.	10,640	10,597	10,640
80.	10,640	10,597	10,640
70.	10,640	10,576	10,640
60.	10,640	10,576	10,640
50.	10,661	10,576	10,661
40.	10,661	10,576	10,661
30.	10,661	10,576	10,661
20.	10,682	10,576	10,682
10.	10,682	10,576	10,682
0.	10,704	10,576	10,704

Stimmgabel U_{t_2} .

Tabelle X.

S.-E.	vor	während	nach	S.-E.	vor	während	nach
0.	10,661	10,555	10,661	150.	—	Nachdem der Widerstand so S.-E. eingeschaltet war, war der Strom nicht mehr im Stande, die Stimm- gabel zu treiben.	
10.	10,661	10,576	10,661	100.	—		
20.	10,661	10,576	10,661	90.	—		
30.	10,661	10,597	10,661	80.	—		
40.	10,661	10,618	10,661	70.	10,618	10,597	10,618
50.	10,618	10,597	10,618	60.	10,618	10,597	10,618
60.	10,618	10,597	10,618	50.	10,618	10,576	10,618
70.	10,618	10,597	10,618	40.	10,618	10,576	10,618
80.	10,618	Nachdem der Widerstand so S.-E. eingeschaltet war, war der Strom nicht mehr im Stande, die Stimm- gabel zu treiben.	Nachdem der Widerstand so S.-E. eingeschaltet war, war der Strom nicht mehr im Stande, die Stimm- gabel zu treiben.				
90.	10,618			30.	10,618	10,576	10,618
100.	—			20.	10,618	10,555	10,618
150.	—			10.	10,618	10,555	10,618
200.	—			0.	10,618	10,555	10,618

Bei gleichbleibendem Anfangsdruck und gleicher Stromstärke nimmt der Widerstand des Contactes zu, wenn die

Tonstärke abnimmt. Jeder Tonstärke entspricht ein gewisser Widerstand, der jedesmal wiederkehrt, wird die Tonstärke vermehrt oder vermindert. Fig. 3 zeigt uns diesen Verlauf in einer Curve, bei welcher die Abscissen die eingeschalteten Widerstände und die Ordinaten die davon abhängigen Widerstände des Contactes vorstellen.

Der letzte Factor, der bei einer Untersuchung über den electricischen Widerstand eines Kohlencontactes in Frage kommen könnte, wäre nun noch der Einfluss der Tonhöhe auf den Widerstand, vorausgesetzt, dass Tonstärke, Stromintensität und Anfangsdruck dieselben bleiben. Um dies zu ermitteln, stellte ich folgenden Versuch an: Bei gleichem Anfangsdruck, gleicher Intensität des Stromes und gleicher Tonstärke wurde unmittelbar nacheinander der Kohlencontact mittelst der drei verschiedenen Stimmgabeln in Bewegung gesetzt, der Ruhewiderstand vor und nachher gemessen und sonst alles wie bei den vorhergehenden Versuchen genau bestimmt.

Das Ergebniss war folgendes:

Tabelle XI.

Stimmgabel	vor	während	nach
Ut_{-1}	8,761	8,727	8,761
Ut_1	8,761	8,727	8,761
Ut_2	8,761	8,727	8,761
Ut_4	8,761	8,727	8,761
Ut_{-1}	8,761	8,727	8,761

Der Widerstand im Contact während der Bewegung ist bei gleichbleibendem Anfangsdruck, gleicher Stromintensität und gleicher Tonstärke unabhängig von der Tonhöhe.

Dies sind die Resultate, die ich bei meinen Untersuchungen über den electricischen Widerstand des Kohlencontactes während der Bewegung erhielt, und zwar, wie schon im Anfange bemerkt, eines Contactes, dessen Theile polirt sind.

Bei diesen Versuchen war nur der eine Kohlentheil gegen den anderen beweglich. Dadurch, dass ich an Stelle

der Mikrometerschraube ebenfalls ein Telephon brachte und die Kohlenspitze auf der Metallplatte in derselben Weise anbrachte, wie ich es im Eingang geschildert, ferner den treibenden Strom auch durch das obere Telephon schickte, war es möglich, den Widerstand zu untersuchen, der sich ergab, wenn die beiden Kohlentheile in Bewegung waren. Die Resultate stimmten mit den hier angegebenen überein, nur waren die Untersuchungen infolge der grösseren Beweglichkeit bei weitem schwieriger. Erwähnen will ich noch, dass Metallcontacte, wie Platin-Platin, oder gemischte Contacte, wie Platin-Kohle, ein analoges Verhalten zeigen. Die Unterschiede im Widerstande sind aber nicht so auffallend, weil dieselben im Vergleich zu einem Kohle-Kohlecontact schon einen sehr geringen Anfangswiderstand besitzen, mithin die Grenzen, innerhalb deren sich die Schwankungen der Widerstände bewegen, nicht so weit auseinander liegen.

Das Gesamtergebniss vorliegender Untersuchungen über polirte Kohle-Kohlecontacte lässt sich also in Folgendem zusammenfassen:

Der Widerstand eines polirten Kohle-Kohlecontactes ist bei gleichbleibendem Anfangsdruck und gleicher Intensität des durchgehenden Stromes während der Bewegung kleiner als während der Ruhe. Nach Aufhören der Bewegung kehrt der ursprüngliche Widerstand der Ruhe wieder zurück. Die Differenz des Widerstandes der Bewegung und desjenigen der Ruhe ist um so grösser, je grösser der Anfangswiderstand, oder, was gleichbedeutend, je geringer der Anfangsdruck ist. Der Widerstand der Bewegung nimmt bei gleichbleibendem Anfangsdruck und gleicher Stärke der Bewegung bei abnehmender Intensität des durch den Contact gehenden Stromes zu und kehrt nach Aufhören der Bewegung zu seinem Ruhewiderstand zurück. Einer und derselben Intensität entspricht derselbe Widerstand, der nach stattgefunder Vermehrung und darauf folgender Verminderung der Intensität wieder zu seinem ursprünglichen Werth zurückkehrt.

Der Widerstand während der Bewegung nimmt bei gleichbleibendem Anfangsdruck und gleicher Stromintensität

bei abnehmender Stärke der Bewegung, also bei abnehmender Tonstärke ab. Eine Vermehrung und darauf folgende Verminderung der Tonstärke ändert nichts am ursprünglichen Widerstand.

Der Widerstand während der Bewegung ist bei gleicher Tonstärke und Intensität des durchgehenden Stromes nicht abhängig von der Anzahl der Schwingungen, die die Bewegung bedingen, also unabhängig von der Tonhöhe.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. v. Beetz für seine vielfache Anregung und liebevolle Unterstützung bei dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

München, im März 1884.

VIII. Bestimmung des Werthes der Siemens'schen Widerstandseinheit in absolutem electromagnetischen Maasse; von *H. Wild.*

Im 32. Bande der Memoiren der Kaiserl. Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg habe ich eine im Sommer 1883 im Observatorium in Pawlowsk ausgeführte Bestimmung des Werthes der Siemens'schen Widerstandseinheit in absolutem electromagnetischen Maasse ausführlich mitgetheilt und daraus die Länge einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt abgeleitet, deren Widerstand bei 0° gleich dem der internationalen Widerstandseinheit des Ohm ist.

Ich gebe hier einen kurzen Auszug daraus und füge die Correction am Endresultate hinzu, welche eine bezügliche Bemerkung des Hrn. Dorn¹⁾ zur Folge gehabt hat.

Die Methode, die ich bei meiner Bestimmung anwandte, ist die von W. Weber angegebene, wobei die Dämpfung eines in einem Multiplicator schwingenden Magnets

1) Dorn, Wied. Ann. 22. p. 558. 1884.

beobachtet wird. Ausser W. Weber selbst haben nach derselben später noch H. F. Weber in Zürich (1877) und E. Dorn in Breslau (1882) absolute Widerstandsmessungen ausgeführt.

Ich habe diese Methode zur Umgehung der schwierigen Bestimmung des Inductionscoefficienten und der Elimination der Declinationsvariationen in der Art modifizirt, dass ich den Magnet im Multiplicator bifilar aufhing und dabei in die Transversallage, d. h. senkrecht zum magnetischen Meridian stellte, also auch den Multiplicator in diese Normale brachte. Dann ist der Widerstand W des in sich geschlossenen Multiplicatordrahts in absolutem electromagnetischen Grundmaasse gegeben durch:

$$W = \frac{M}{H} \cdot \frac{C^2}{2 T_0 \operatorname{ctg} z} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\pi^2}\right)}} \sqrt{\frac{H_0 M_0 \operatorname{ctg} z_0 N}{H M \operatorname{ctg} z N_0} - \frac{\lambda_0}{1 + \frac{\lambda_0^2}{\pi^2}} \frac{H_0 M_0 \operatorname{ctg} z_0}{H M \operatorname{ctg} z}},$$

wo λ das bei geschlossenem, λ_0 das bei geöffnetem Multiplicatordraht bestimmte logarithmische Decrement, M das magnetische Moment, N das Trägheitsmoment des Multiplicatormagnets und H die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft zur Zeit der ersten Bestimmung, M_0 , N_0 und H_0 dieselben Grössen zur Zeit der letzteren Beobachtung, T_0 die Schwingungsdauer des Magnets bei geöffnetem Multiplicator, C die sogenannte Empfindlichkeitskonstante des letzteren darstellen, und wir der Kürze halber gesetzt haben:

$\operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg}(z_a + \zeta) \{1 + \sin \zeta \operatorname{tg}(z_a + \zeta) + \sigma [1 - z_a \operatorname{ctg}(z_a + \zeta)] + f\}$, und $\operatorname{ctg} z_0$ sich vom vorstehenden Ausdruck nur durch Substitution von ζ_0 statt ζ unterscheidet. Hier repräsentirt z_a den sogenannten Torsionswinkel des BifilarMagnets bei der Einrichtung des Bifilars, ζ die aus den Ablesungen an der Scala zu erschliessende Änderung dieses Winkels von jenem Moment bis zur Bestimmung des logarithmischen Decrement, λ , resp. ζ_0 die entsprechende Grösse bis zur Ermittlung von λ_0 , endlich σ eine von der Torsion der Aufhänge-

faden, f eine vom Einfluss des Eisengehalts im Multiplicatordraht abhängige Constante.

Die Grösse M/H ist, wie dies auch die beiden Weber gethan haben, einfach dadurch zu bestimmen, dass man den Multiplicatormagnet auf einen anderen unifilar aufgehängten Magnet ablenkend einwirken lässt. Geschieht dies in der ersten Hauptlage der Magnete zu einander, so ergibt sich durch Beobachtung des Ablenkungswinkels v mit Fernrohr und Scala :

$$\frac{M}{H} = \frac{E^3 \operatorname{tg} v (1 + 3m t_e + \Theta'' + f'')}{2[1 - \mu (t_e - t) - (n_e - n') k'] \left(1 + \frac{p}{E^2} + \frac{q}{E^4} + \frac{r}{E^6} + \dots\right)},$$

wo E die Entfernung der Mittelpunkte der Magnete, wie sie durch Abmessung mittelst eines Maassstabes vom Ausdehnungscoëfficienten m bei der Temperatur t_e gefunden wurde, Θ'' das Torsionsverhältniss beim Unifilar, f'' der Eiseninfluss des Multiplicators auf dasselbe (der neue Magnet ebenfalls im Multiplicator an Stelle des früheren aufgehängt gedacht), p , q , r etc. Constante, welche von der Vertheilung des Magnetismus in beiden Magneten der Länge (p und q) und der Quere (r) nach abhängen, μ den Temperaturcoëfficient des Hauptmagnets, t_e die Temperatur desselben bei diesen Ablenkungsbeobachtungen und t diejenige bei Bestimmung des logarithmischen Decrement λ , endlich n_e und n' die Ablesungen an einem Variationsbifilar-magnetometer zu diesen beiden Zeiten und k' den Empfindlichkeitscoëfficient des letzteren darstellen.

Gewöhnlich wird von den Constanten p , q und r nur $p + r$ empirisch dadurch bestimmt, dass man in zwei verschiedenen Entfernungen E die Ablenkungen beobachtet, und q wird als klein ganz vernachlässigt. In meiner Abhandlung „Ueber die Genauigkeit absoluter Bestimmungen des Erdmagnetismus“¹⁾ habe ich bereits auf die Schwierigkeiten der empirischen Bestimmung von p sowie auf den Fehler bei Vernachlässigung des Gliedes mit q hingewiesen und gezeigt, dass es viel zweckmässiger ist, die Verhältnisse

1) Wild, Report. f. Meteorol. 8. Nr. 7 p. 29 u. 57. Januar 1883 u. Exner, Report. 19. p. 762 u. 20. p. 1. 1883.

der Längendimensionen der beiden Magnete so zu wählen, dass:

$$\frac{p}{E^3} + \frac{q}{E^4} = 0$$

wird. Dies ist bei meinem Apparat geschehen, und außerdem wurden dabei nach der bezüglichen Theorie von Chwolson¹⁾ die Verhältnisse auch der Querdimensionen der Magnete so gewählt, dass $r = 0$ wurde. Die höheren Glieder sind als sehr klein zu vernachlässigen, da: $E = 1800$ mm und die Länge L des Hauptmagnets 290 mm war.

Wegen der Kleinheit des Ablenkungswinkels v ($3\frac{1}{2}^{\circ}$) konnte ich ebenso die Berücksichtigung der Induction bei diesen Ablenkungen unterlassen, die sonst im Nenner des obigen Ausdrückes für M/H noch ein Correctionsglied:

$$1 + 2\nu' M'' \sin v \cdot E^{-3}$$

bedingt hätte, wo M'' das magnetische Moment des Hulpmagnets und ν' den Inductionscoefficient des Hauptmagnets bezeichnet.

Dorn hat in den Ausdruck für W statt M/H andere viel schwieriger zu bestimmende Grössen eingeführt und dadurch die Fehlerquellen bei den Messungen beträchtlich vermehrt.

Zur Ermittelung der Multiplicatorconstanten C habe ich dagegen dieselbe Methode wie Dorn befolgt. Während nämlich die beiden Weber diese Grösse nach dem Biot-Savart'schen Gesetz aus der Form und den Dimensionen des Multiplicators und Magnets zu berechnen suchten, hat sie Dorn dadurch bestimmt, dass er den Strom einer galvanischen Batterie als Stammstrom durch eine Tangentenbussole und als schwächeren Zweigstrom durch den Multiplicator leitete und die Ablenkungen in letzterem und in der Tangentenbussole beobachtete. Mit Berücksichtigung der bifilaren Aufhängung des Multiplicatormagnets bei unserem Apparat ist:

$$C = K \frac{L \left(1 + \frac{W_m}{W_s} \right) \cdot \operatorname{ctg} Z \cdot \sin \Phi}{4(1 + \Theta') \left(1 - \frac{b}{2} \operatorname{tg}^2 \Psi \right)}$$

1) Chwolson, Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences 31. Nr. 10 p. 19. Mai 1883.

wo L das Verhältniss der Horizontalintensitäten am Ort des Multiplicators und dem Ort der Tangentenbussole, W_m der gesammte Widerstand des Multiplicatorzweiges, W_s der kleinere Widerstand des Nebenzweiges, Θ' das Torsionsverhältniss bei der Tangentenbussole, Φ das Mittel von vier am Multiplicator und Ψ ebenso das Mittel von vier an der Tangentenbussole gleichzeitig beobachteten Magnet-Ablenkungen darstellen, wobei abwechselnd beim einen und anderen Instrument der Strom commutirt wurde, und Z ebenso das Mittel aus vier Winkeln darstellt, die durch einen analogen Ausdruck wie oben:

$$\operatorname{ctg} z_1 = \operatorname{ctg} (z_a + \zeta_1) \{ 1 + \sin \zeta_1 \operatorname{tg} (z_a + \zeta_1)$$

$$+ \sigma [1 - z_a (\operatorname{ctg} (z_a + \zeta_1) \pm \frac{\varphi_1}{2})] + f \}$$

gegeben sind. Hier ist ζ_1 die Änderung des Torsionswinkels z_a des Bifilars bis zum Moment der Beobachtung, abgesehen von der Ablenkung $\pm \varphi_1$ durch den Strom.

Die Grösse b repräsentirt die eventuelle Veränderlichkeit der Multiplicatorconstanten C mit dem Ablenkungswinkel φ des Magnets aus der Parallelage zu den Windungen, indem ich statt C setzte:

$$C \left(1 - \frac{b}{2} \varphi^2 \right).$$

Hat b einen erheblichen Werth — bei meinem Multiplicator war $b = 5,0942$ — so ist auch oben für λ nicht der unmittelbar bestimmte, sondern der nach der Theorie von Chwolson¹⁾ vermittelst der Grösse b auf unendlich kleine Amplituden reducire Werth derselben einzuführen. Die Bestimmung aber von b kann nach Chwolson durch Beobachtung des logarithmischen Decrement λ bei verschiedenen Azimuten des Magnets zu den Multiplicatorwindungen geschehen.

Das Verhältniss W_m/W_s der beiden Zweige wurde bei jeder einzelnen Beobachtungsserie vermittelst der Wheatstone'schen Brücke und Siemens'scher Stöpselrheostaten

1) Chwolson, Mém. de l'Acad. Imp. d. Scienze. 28. Nr. 3. 1880.

bestimmt und dabei zugleich auch der Widerstand des Multiplicators durch Siemens'sche Einheiten ausgemessen. Zu dem Ende war der Siemens'sche Stöpselrheostat wiederholt calibrirt und mit zwei von Dr. O. Frölich bei Siemens und Halske in Berlin besonders sorgfältig verificirten Siemens'schen Doseineinheiten verglichen worden. Die Sicherheit dieser Messungen war grösser als 0,0001 der zu bestimmenden Grössen.

Die Bestimmung von L , das sich übrigens, wie der Eisenfreiheit des Locals halber zu erwarten war, sehr nahe = 1 erwies, wurde aus der Beobachtung der Schwingungsdauern eines und desselben Magnets an beiden Orten abgeleitet.

K repräsentirt die Empfindlichkeitsconstante der Tangentenbussole. Die unserige ist nach dem v. Helmholtz'schen Principe construirt, d. h. die Entfernung der mittleren Drahtwindung jeder Rolle beiderseits von der Drehungssaxe des Magnets war gleich dem halben Radius gemacht. Dann ist, wenn, wie in unserem Fall, die Poldistanz $2l$ des Magnets kleiner als $\frac{1}{10}$ des Kreisdurchmessers der Ströme ist, mit ausreichender Annäherung:

$$K = \frac{4\pi(1+2u)}{R \left(1 + \frac{D^2}{R^2}\right)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{288 \cdot A^4}{(1+2u) 125 \cdot R^4} \sum_{n=1}^{n=6} n^4 \right.$$

$$\left. + \frac{192 \cdot A^3 l^2 (1 - 5 \sin^2 \Psi)}{125 \cdot R^4 (1+2u)} \sum_{n=1}^{n=6} n^2 \right\}$$

zu setzen, wo D die Entfernung der mittleren Windung jeder Rolle von der Drehungssaxe, R der Halbmesser dieser Windungen (eine Lage), $1+2u$ die Zahl der Windungen auf jeder Rolle und A der Abstand der Mitten zweier benachbarter Drähte, endlich Ψ den Ablenkungswinkel des Magnets darstellen.

In unserem Falle nun, wo:

$$1+2u = 15, \quad A = 1,825 \text{ mm}, \quad l = 38,7 \text{ mm},$$

$$R = 505,8 \text{ mm}, \quad D = 252,9 \text{ mm}, \quad \Psi = 3^\circ 30'$$

waren, wurden die Glieder in der Klammer höchstens 0,00001, und der Ausdruck für K wird dann einfach:

$$K = \frac{4\pi(1+2u)}{R \left(1 + \frac{D^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$
 wobei zu bemerken, dass die unmittelbar erhaltenen Werthe von R und D , welche durch Ausmessung mit einem Maassstab bei t° erhalten wurden, noch mit $(1+mt)$ zu multipli- ciren sind, wenn m der Ausdehnungscoefficient des Maass- stabs ist.

Der Radius der Windungen wurde so gross genommen, um den Einfluss der Beobachtungsfehler zu verkleinern, und um diese selbst geringer zu machen, habe ich abweichend vom bisherigen Verfahren einen 1 mm dicken, blanken Kupferdraht auf die Rollen aufwinden lassen. Zur bes- seren Isolation waren die Holzrollen mit aufgeschnittenen Ebonittringen an ihrer Peripherie bekleidet, welche genau kreisrund abgedreht und dann mit einer $\frac{1}{3}$ mm tiefen Furche in einer Schraubenlinie von 1,8 mm Höhe und sechzehn Um- gängen zur Aufnahme des Drahtes versehen wurden. So war es möglich, bei der Ausmessung der Durchmesser der Windungen mittelst eines Kathetometers in der That die für eine Genauigkeit von $\pm 0,0001$ des Endresultates erforderliche Sicherheit von $\partial R/R = \pm 0,00005$ oder $\partial R = \pm 0,025$ mm zu erzielen.¹⁾ Sowohl diese Länge als auch die Entfernung der Magnete bei den Ablenkungsbeobachtungen sind durch Vergleich mit dem in seinen Unterabtheilungen verificirten Normalmeter des physikalischen Centralobservatoriums, dessen ganze Länge durch das Mittel eines Etalonmeters der Academie der Wissenschaften direct auf das Archivmeter in Paris, resp. auf das künftige internationale Meterprototyp bezogen ist, in wahren Millimetern ausgedrückt worden.

Die Schwingungsdauer T_0 des Magneten bei geöff- netem Multiplicator mass ich mit Zuhilfenahme eines Chro-

1) Beträgt der Durchmesser der Rollen blos 0,5 m, so würde also für den Halbmesser R eine Genauigkeit von $\pm 0,012$ mm erforderlich. Diese Grenze ist nach meiner Erfahrung selbst bei kranken Drähten kaum er- reichbar, bei besponnenen Drähten aber wird der Fehler mindestens auf das Zehnfache steigen. Hierin sehe ich eine Hauptfehlerquelle bei vielen Bestimmungen des Ohms.

nographen in der Art, dass man aus den Anfangs- und Endregistrierungen von je zwölf Durchgängen durch die Gleichgewichtslage mit einem Intervall von ungefähr 45 Minuten je zwölf Werthe von ca. 200 T_0 erhielt. Nach Reduction auf unendlich kleine Amplituden und richtige mittlere Sonnenzeit durch Beziehung auf die Normaluhr des Observatoriums in Pawlowsk erhielt man als durchschnittlichen Werth:

$$T_0 = 13,5152^3 \pm 0,0003,$$

wo $\pm 0,0003$ i. e. der mittleren Fehler einer Bestimmung von T kleiner ist, als 0,00003 des ganzen Werthes.

Der Torsionswinkel Z_a des Bifilars wurde jeweilen bei der Einrichtung des Bifilars am Theilkreis der Suspension mit der genügenden Genauigkeit von $\pm 10''$ bestimmt. Er war im Durchschnitt: $z_a = 48^\circ 5'$. Die Winkel ζ aber haben im Maximum $13' 25''$ erreicht und sind aus den Ablesungen an der Scala des Bifilars ebenfalls mit der ausreichenden Sicherheit von $\pm 1'' = \pm 0,05$ Scalentheilen ermittelt worden.

Die logarithmischen Decrementa λ und λ_0 sind jeweilen aus einer grösseren Zahl einzelner Bestimmungen (30 — 40) abgeleitet worden, wobei im Durchschnitt war:

$$\lambda = 1,45705, \quad \lambda_0 = 0,00212.$$

Die wahrscheinlichen Fehler je des Endresultates bei jeder einzelnen Messungsreihe dieser beiderlei Grössen betrugen im Durchschnitt:

$$\partial \lambda = \pm 0,000097, \quad \partial \lambda_0 = \pm 0,000009,$$

welche Genauigkeit ebenfalls für eine Sicherheit des Schlussresultates für W von $\pm 0,0001$ mehr als genügend ist.

Die Torsionsverhältnisse Θ'' beim Unifilar für die Ablenkungsbeobachtungen und Θ' bei der Tangentenbusssole sind in der üblichen Weise mit übergrosser Sicherheit bestimmt worden.

Die Torsionskonstante σ der Aufhängefaden beim Bifilar habe ich einmal nach dem theoretischen Ausdruck für dieselbe, und sodann am Apparate selbst empirisch durch Torsion der Faden ermittelt und dabei ebenfalls eine grössere Genauigkeit als nötig erreicht.

Den Eiseneinfluss des Multiplicatordrahtes, der meines Wissens bisher nicht berücksichtigt worden ist und

doch am Endresultat eine erhebliche Correction — in meinem Fall 0,0060 des ganzen Werthes¹⁾ — bedingen kann, habe ich durch Drehung des Multiplicators um eine Verticalaxe und Beobachtung der dadurch am Magnet in seinem Innern bewirkten Ablenkungen bestimmt. Auch hier war die Genauigkeit eine solche, dass sie im Endresultat keinen grösseren Fehler als $\pm 0,0001$ bedingen konnte.

Auch der Temperaturcoefficient μ des Hauptmagnets wurde mit übrig grosser Sicherheit aus den Beobachtungen am Bifilar nach der von mir angegebenen Methode²⁾ ermittelt.

Ueberhaupt war es mein Bestreben bei dieser Untersuchung, wenn immer möglich, jede einzelne der vielen auf das Endresultat influirenden Grössen mit einer Genauigkeit zu bestimmen, welche von daher für jenes eine Sicherheit von $\pm 0,0001$ des ganzen Werthes garantire. Dass mir dies durchweg gelungen ist, habe ich in meiner Abhandlung jenseitlich nachgewiesen. Die verhältnissmässig grössste Unsicherheit bot die Bestimmung der Ablenkungswinkel ψ bei der Tangentenboussole und φ beim Bifilar-magnet des Multiplicators dar. Den Fehlern bei Messung dieser Winkel und dem Zusammenwirken geringerer Fehler bei Bestimmung anderer constituirender Grössen schreibe ich die etwas grösseren Abweichungen der Resultate der 9 einzelnen, voneinander unabhängigen Beobachtungsreihen zu. Dieselben ergaben nach Division des in absolutem Maasse erhaltenen Widerstandes des Multiplicatordrahtes durch den ebenfalls bestimmten Werth desselben in Siemens'schen Einheiten als Werth einer Siemens'schen Einheit in Ohm:

	1883	Ohm	Abweichung
21. Juli . . .	0,94528	—0,00040	
22. „ . . .	0,94580	+0,00012	

1) Wenn man nämlich aus den verschiedenen Ausdrücken, die den Werth von W constitiren, die Factoren für den Eiseneinfluss heraushebt, so ergibt sich am Schlussresultat von daher der Correctionsfactor: $1 + f + f''$, der nach Einsetzung der Werthe von f und f'' wird: 1,00598.

2) H. Wild, Bull. de l'Acad. Imp. des sc. de St. Pétersbourg. 19, p. 1. 1873.

	1883	Ohm	Abweichung
26. Juli . . .	0,94566	— 0,00002	
3. August . . .	0,94539	— 0,00035	
4. " " . . .	0,94565	— 0,00003	
5. " " . . .	0,94521	— 0,00047	
10. " " . . .	0,94612	+ 0,00044	
11. " " . . .	0,94604	+ 0,00036	
13. " " . . .	0,94601	+ 0,00033.	

Hieraus folgt also im Mittel:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,94568 \text{ Ohm}$$

mit einer mittleren Abweichung der Einzelresultate von $\pm 0,00028$ und einem wahrscheinlichen Fehler der Endresultate von $\pm 0,000081$.

Dieser geringe Fehler des Endresultates zeigt ebenfalls, dass, abgesehen von eventuellen Fehlern, welche die Theorie noch involviren mag, es bei dieser Methode möglich ist, alle zusammenwirkenden Grössen mit einer absoluten Sicherheit zu bestimmen, die einer Genauigkeitsgrenze von nahe $\pm 0,0001$ des gesuchten Werthes entspricht. Die Eisenfreiheit des benutzten Locales und die hohe Temperaturconstanz desselben mögen zu diesem günstigen Resultat mit beigetragen haben.

An obigem Resultate sind aber noch zwei Correctionen vorzunehmen.

Die erste Correction röhrt von der nicht berücksichtigten Selbstinduction im Multiplicator her. Dieselbe ist nach Dorn durch den Factor:

$$1 + \frac{\Pi}{WT_0} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}$$

gegeben, wo der Coëfficient Π der Selbstinduction bei meinem Multiplicator $0,8891 \cdot 10^8$ (mm) ist. Nach Einsetzung der übrigen Zahlenwerthe bei meinen Bestimmungen wird daher dieser Factor: $1,000\ 311\ 8.$ ¹⁾

1) In einem kurzen Nachtrag zu meiner erwähnten Abhandlung habe ich infolge eines Vergleiches der obigen Formel von Dorn für die Selbstinduction mit der von Maxwell in seinem Lehrbuch der Electricität (Deutsche Uebersetzung, 2. Theil, p. 509) gegebenen in Uebereinstimmung

Mit Anbringung dieser Correction geht daher mein obiges Resultat in folgendes über:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,94597 \text{ Ohm.}$$

An diesem, in meiner Abhandlung bereits mitgetheilten Werthe ist aber noch eine zweite, viel grössere Correction anzubringen, welche durch eine eigenthümliche Einrichtung der Siemens'schen Stöpselrheostaten bedingt wird. Da ich die meinigen nicht geöffnet hatte, so war mir dieselbe unbekannt geblieben. Hr. Dorn¹⁾ hat nämlich darauf aufmerksam gemacht, dass bei allen von ihm nachgesesehenen Siemens'schen Stöpselrheostaten nicht, wie zu erwarten war, die Enden jedes der Neusilberdrahtrollen für sich unmittelbar mit den Messingklötzen auf der Oberfläche des Kastens verbunden sind, sondern dass an den unteren Enden von Kupferdrähten, welche von den Klötzen heruntergehen, je die Enden zweier aufeinanderfolgender Widerstandsrollen befestigt sind. Die Folge davon ist, dass durch das Ziehen zweier benachbarter Stöpsel nicht die Summe der Widerstände, welche dem Ziehen je eines derselben entsprechen, sondern diese Summe weniger dem doppelten Widerstand des vom mittleren Klotz herunterführenden Kupferdrahtes in den Stromkreis eingeschaltet wird. Nach Dorn's Bestimmungen beträgt der Widerstand dieser Kupferdrähte ziemlich übereinstimmend ungefähr 0,0004 S.-E., sodass derselbe bei feineren Messungen nicht vernachlässigt werden kann. Dieser Umstand ist daher sowohl bei der Calibrirung als beim Gebrauch der Siemens'-

mit dem Uebersetzer die Richtigkeit der ersteren in Zweifel gezogen und geglaubt, dem doppelt so grossen Werth dieser Correction von Maxwell den Vorzug geben zu müssen. Jetzt hat Hr. Dorn (Wied. Ann. 22. p. 1. 1884) überzeugend dargethan, dass der Unterschied seiner Formel und derjenigen von Maxwell nur ein scheinbarer ist, indem in dem Ausdruck: $a = \pi/T$ bei Maxwell T die Schwingungsdauer bei geschlossenem Multiplikator mit Selbstinduction, bei ihm dagegen bereits die entsprechende Grösse ohne Selbstinduction darstellt, welche allein nach den von W. Weber gegebenen Relationen durch die Schwingungsdauer T_s bei geöffnetem Multiplikator ausgedrückt werden kann. Mein Fehler bestand darin, dass ich in der Formel von Maxwell dem T die zweite Bedeutung beilegte.

1) Dorn, Wied. Ann. 22. p. 558. 1884.

schen Stöpselrheostaten, insbesondere für die kleineren Widerstände, wohl zu beachten. Hr. Dorn hat in der erwähnten Abhandlung den Einfluss desselben auf die Calibrirung untersucht und die Resultate zur Berichtigung der von mir mitgetheilten Verification meines Stöpselrheostaten unter Voraussetzung einer entsprechenden Construction desselben und eines gleichen Widerstandes der Kupferdrähte angewendet. Er findet, dass infolgedessen mein obiger Werth für die Siemens'sche Einheit übergehen solle in:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,94347 \text{ Ohm.}$$

Sowie mir die Bemerkungen von Hrn. Dorn bekannt wurden, habe ich den von mir benutzten Siemens'schen Stöpselrheostaten Nr. 2805 nachgesehen und gefunden, dass er ebenfalls die gerügte Construction besitze, indessen nicht ganz dem von Hrn. Dorn in seiner Abhandlung vorausgesetzten Schema entspreche. Erstens sind nur die Kupferdrähte vom sechsten Klotz an gleichlang, die unter sich ebenfalls gleichlangen vom ersten bis vierten Klotz sind ziemlich kürzer, und der vom fünften Klotz steht zwischen den beiderlei Längen in der Mitte (die Dicke aller Drähte ist dieselbe); sodann geht obiger Rheostat von 0,1 bis 200 S.-E., sodass die eine Reihe die Widerstände von 0,1 bis 5, und die andere die von 10 bis 200 S.-E. umfasst, somit nicht, wie Hr. Dorn voraussetzte, zwischen 2 und 5 S.-E., sondern zwischen 5 und 10 S.-E. die untere Verbindung der einzelnen Widerstandsrollen einen Unterbruch aufweist. Es erschien daher für meinen Rheostaten Nr. 2805 eine besondere Bestimmung der Widerstände der fraglichen Kupferdrähte und eine Neuberechnung meiner Widerstandsmessungen unter Berücksichtigung ihres Einflusses geboten. Hr. Dr. O. Chwolson, der, mit Ausnahme einer Controlbeobachtungsreihe von mir, alle Widerstandsmessungen bei meiner Untersuchung ausgeführt hat, hat sich freundlichst auch dieser nachträglichen bezüglichen Arbeit unterzogen und nach einer ihm eigenthümlichen Methode — nämlich durch abwechselnde Combination von unmittelbar aufeinanderfolgenden und von auseinanderstehenden, d. h. durch nichtgezogene Stöpsel unterbrochenen Widerständen bei der Calibrirung des Rheo-

staten — die Widerstände der einzelnen Kupferdrähte bestimmt, deren Kenntniss dann eine Correction der früheren Calibrirungen unseres Rheostaten Nr. 2805 erlaubte. Bezeichnen wir die Widerstände der von den aufeinanderfolgenden Klötzen heruntergehenden Kupferdrähte bis zu den Widerstandsrollen, resp. mit k_1 , k_2 , k_3 etc., so fand er:

$$\begin{array}{ll} k_2 = 0,000\,368 \text{ S.E.} & k_6 = 0,000\,517 \text{ S.E.} \\ k_3 = 0,000\,404 & k_7 = 0,000\,491 \\ k_4 = 0,000\,380 & k_8 = 0,000\,475 \\ k_5 = 0,000\,443 & \end{array}$$

Die folgenden Kupferdrahtwiderstände, die noch in Betracht kommen, nämlich k_{11} , k_{12} und k_{13} wurden ihrer gleichen Länge halber gleich dem Mittel von k_6 bis k_8 gesetzt.

Corrigirt man hiernach unsere früheren Calibrirungen des Rheostaten Nr. 2805 und berechnet danach aufs neue die in unseren Formeln auftretenden Widerstandsgrößen, so ergibt sich jetzt als berichtigtes Endresultat meiner Messungen: 1 S.E. = 0,94315 Ohm, und danach ist die Länge l einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt, welche bei 0° den Widerstand eines Ohm darstellt: $l = 106,027$ cm.

St. Petersburg, 18. September 1884.

IX. Ein neues Galvanometer; von J. Rosenthal.

(Hierzu Taf. VIII, Fig. 4 u. 5.)

Seitdem G. Wiedemann der Tangentenbussole mit Spiegelablesung eine Form gegeben hat, welche sie zu feineren Messungen geeignet macht, hat dieselbe besonders bei Physiologen zur Untersuchung der thierisch-electrischen Erscheinungen allgemeinen Eingang gefunden. Auch hat die von du Bois-Reymond empfohlene Astasirung mittelst des Hauy'schen Stabes und die Aperiodisirung der Schwingungen den Gebrauch des Instrumentes noch bequemer gemacht und die Empfindlichkeit bis zu einem vorher ungeahnten Grade

gesteigert, sodass es allen Anforderungen an Genauigkeit und Empfindlichkeit entspricht.

Neben diesen Tangentenbussolen haben nur noch die verschiedenen Formen des Galvanometers, welche Thomson angegeben hat, Verbreitung gefunden. Die ältere Form des Nobili'schen Galvanometers ist fast ganz durch die neueren verdrängt worden.

So vorzüglich aber auch die erwähnten Instrumente sind, so kann man ihnen doch den Vorwurf machen, dass die Anordnung der Drahtwindungen bei ihnen eine sehr ungünstige ist, sodass ihre Empfindlichkeit nur durch eine unverhältnismässige Vergrösserung der Windungszahl und dadurch bedingte Vergrösserung des Widerstandes erreicht werden konnte. Eine unmittelbare Folge davon ist es auch, dass zu einer Wiedemann'schen Bussole, wenn sie zu verschiedenen Versuchen dienen soll, mindestens drei Paare von Rollen mit verschiedenem Draht erforderlich sind: ein Paar für Thermoströme, ein Paar für die gewöhnlichen hydroelectrischen Ströme und ein drittes Paar für thierisch-electrische Versuche.

Durch eine neue Art der Anordnung der Windungen ist es mir gelungen, ein Instrument herzustellen, welches bei nur 30 Ohm Widerstand alle bisherigen Instrumente an Empfindlichkeit bei weitem übertrifft und dabei für Thermoströme wie für physiologisch-electrische Versuche brauchbar ist.

Ganz besonders nützlich aber erweist sich diese gesteigerte Empfindlichkeit bei den jetzt so häufig vorkommenden Nullbeobachtungen, also bei Widerstandsmessungen mittelst der Wheatstone'schen Brücke, bei Messung electromotorischer Kräfte nach der Poggendorff-du Bois-Reymond'schen Compensationsmethode u. s. w.

Dabei ist die Handhabung des Instrumentes eine sehr einfache und sein Preis entsprechend der einfachen Einrichtung ein geringer.¹⁾

1) Das Instrument wird unter dem Namen „Rosenthal's Mikrogalvanometer“ von Dr. M. Th. Edelmann in München für 160 Mark geliefert.

Die Einrichtung des Instrumentes ergibt sich aus den beiden Abbildungen Fig. 4 und 5.

Fig. 4 zeigt das Galvanometer in ganzer Ansicht. Auf einem Marmorfuß *f*, welcher durch die drei Stellschrauben *e*, *f*, *g* horizontal gestellt werden kann, erheben sich die verticalen Säulen *m*, *n*, welche zwischen sich die Platten *i* und *k* fassen. An *k* liegt der Dämpfer *d*, festgeklemmt durch die Schraube *q*, welche in eine Nut bei *u* (vgl. Fig. 5) eingreift. Bei *a* und *b* sind Klemmschrauben, die mit den Enden der Drahtrollen in Verbindung stehen.

Zwischen *i* und *k* befindet sich das aus zwei Halbeylin dern zusammengesetzte drehbare Spiegelgehäuse. Auf die Platte *i* ist das Suspensionsrohr *A* aufgeschraubt, welches oben den Torsionskopf *t* trägt.

Die Einrichtung des wesentlichen Theiles des Instrumentes ist aus Fig. 5 ersichtlich.

Die Magnetnadel ist ein kleiner, hufeisenförmiger Magnet *h*, an dessen Polenden sich zwei horizontale, gekrümmte Stifte *x* und *y*, ansetzen. Diese Stifte sind mit der Nadel aus einem Stück gearbeitet und bilden die Pole derselben, auf welche die ablenkende Wirkung der Rollen aus nächster Nähe und in kräftigster Weise ausgeübt wird. Die Polstifte sind Quadranten eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der Drehaxe der Nadel liegt. Sie gehen frei durch die Höhlungen der beiden Rollen *r* und *s* hindurch. Diese kleinen Rollen sind aus je 200 Windungen eines 0,05 mm dicken, besponnenen Silberdrahts gebildet und auf elfenbeinerne Röllchen gewickelt. Letztere sind zur Hälfte in den elfenbeinernen Rollenträger *w* eingelassen, welcher auch die Klemmen *a* und *b* trägt. Dieser Träger hat die Form eines Parallel-epipedums und ist in zwei Längsschlitzte des kupfernen Dämpfers *d* eingelassen. Festgehalten wird er in diesen durch die Glasplatte *p*, welche durch drei Schraubchen (wie *c*) festgeklemmt ist und den Dämpfer nach unten abschließt. Der Dämpfer ist aus einem dicken cylindrischen Kupferstück mit centraler cylindrischer Bohrung hergestellt.

Oben trägt die hufeisenförmige Magnetnadel den Silber- spiegel *s* und ist mit demselben an einem Coconfaden aufgehängt.

Um das Instrument aufzustellen, verschraubt man die Säulen auf dem Marmorfußboden und stellt diesen horizontal, schraubt die Suspensionsröhre auf, bringt den Faden in dieselbe, hängt die Magnetnadel an und hebt sie, bis der Spiegel zwischen *i* und *k* schwebt. Dann bringt man den Dämpfer (zunächst ohne die Rollen und die untere Verschlussplatte) an seine Stelle und centrirt. Man stellt nun den Dämpfer so, dass der Schlitz für den Rollenträger einen Winkel von 45° mit den Polenden bildet, schiebt den Rollenträger ein und verschliesst mit der Glasplatte *p*. Jetzt dreht man den Dämpfer und mit ihm die Rollen, bis die gekrümmten Polenden *x* und *y* frei in den Höhlungen der Rollen spielen, wozu man durch Heben und Senken des Suspensionsfadens und durch Verbesserung der Centrirung nachhelfen muss. Diese Manipulationen werden sehr erleichtert, wenn man den Spiegel *S* unter den Dämpfer legt. Man kann dann in der Richtung von *T* her durch das ganze Innere des Instrumentes hindurchsehen.

Die Dimensionen des Instrumentes sind folgende:

Gesamthöhe	460 mm
Höhe der Suspensionsröhre	255 "
Höhe des Dämpfers	39 "
Aeusserer Durchmesser desselben	39 "
Lumen desselben	20 "
Höhe des Hufeisenmagnets	27 "
Gewicht desselben mit dem Spiegel	4,900 g
Aeusserer Durchmesser der Drahtrollen	12 mm
Dicke der Drahtrollen	3 "
Lumen derselben	5 "
Widerstand der beiden Rollen	30 Ohm

Um einen vorläufigen Begriff von der Empfindlichkeit des Instrumentes zu geben, dienen folgende Angaben:

Ohne Compensation durch Hauy'schen Stab:

0,1 mm Ausschlag bei 2700 mm Scalenabstand sind
= 0,000 000 005 4 Ampère.

Mit Compensation durch Hauy'schen Stab bei
Erreichung der Aperiodicität:

0,1 mm Ausschlag = 0,000 000 000 12 Ampère.

Ein Neusilber-Eisen-Thermoelement gibt bei 10°C . Temperaturdifferenz unter Einschaltung von 1000 Ohm Widerstand bei 2700 mm Scalenabstand einen Ausschlag von 120 mm.

Es erscheint wohl an und für sich wahrscheinlich, dass innerhalb der Grenzen der kleinen Ablenkungen, welche bei der Spiegelablesung mit Fernrohr und Scala vorkommen, die an der Scala abgelesenen Ablenkungen den Stromstärken proportional sein werden. Doch habe ich es nicht für überflüssig gehalten, mich davon noch durch den Versuch zu überzeugen. Zu diesem Behuf wurde der Strom eines grossen Leclanché'schen Elementes unter Einschaltung eines grossen Widerstandes (6600 S.-E.) durch einen geradlinig ausgespannten Platindraht von 1 m Länge geleitet und die von zwei Punkten dieses Drahtes abgeleiteten Stromtheile durch eine Drahtrolle von 60 S.-E. Widerstand und die Bussole geleitet. Die Ausschläge des fast vollkommen aperiodisch schwingenden Magnets waren:

Abstand der Ableitungs punkte am Rheochord mm	Ausschläge in Scalentheilen in Millimetern		
			Mittel
10	6,0	6,0	6,00
20	18,0	12,0	12,50
30	18,0	17,0	17,50
40	24,0	24,0	24,00
50	29,5	30,0	29,75
100	59,5	61,0	60,25
200	118,0	122,0	120,00
300	176,0	184,0	180,00
400	240,0	245,0	242,50
500	296,0	305,0	300,50
600	355,0	367,0	361,00
700	415,0	432,0	423,50
800	476,0	495,0	485,50

Bedenkt man die Unvollkommenheit des Verfahrens, so ist die Uebereinstimmung hinreichend genau. Die grösste Abweichung, der Werth 18,0 in der einen Reihe beim Rheochordabstand 20, beträgt allerdings 8,83 Proc. des wahren Werthes, aber gerade hier liegt wahrscheinlich ein Ablesungsfehler vor. Alle anderen Fehler liegen innerhalb

derjenigen Grenzen, welche bei der gewählten Versuchsanordnung überhaupt zu erwarten waren.

Die nächste Versuchsreihe bestand darin, dass eine Anzahl von Widerstandsbestimmungen gemacht wurden, um zu sehen, welcher Grad von Genauigkeit zu erreichen war. Die Anordnung war die gewöhnliche mittelst der Wheatstoneschen Brücke. Als Vergleichswiderstände dienten die Neusilberrollen eines Rheostaten von Siemens und Halske mit den Widerständen von 0,1 bis 5000, in Summa 10000 S.-E. Diese Widerstände nebst dem zu messenden bildeten den einen, der 1 m lange Platindraht des Rheochords den anderen Theil der Stromcombination. In die „Brücke“ war das Galvanometer eingeschaltet, seine eine Leitung war mit den Enden des zu messenden und des Vergleichswiderstandes fest verbunden; die andere Leitung endete in einer Platinsschneide, welche auf den Rheochorddraht aufgesetzt wurde. Bei Gleichheit des zu messenden und des Vergleichswiderstandes musste der Strom in der Brücke = Null werden, wenn die Platinsschneide in der Mitte des Rheochorddrahtes, beim Theilstrich 500 stand.

Bei Anwendung eines Leclanché'schen Elementes und kleiner Widerstände war die Empfindlichkeit so gross, dass es ausserordentlich schwer war, vollkommene Ruhe des Magnets zu erhalten, indem kleine Verschiebungen des Rheochordschiebers um 0,1 mm schon starke Ausschläge bald nach der einen, bald nach der anderen Richtung gaben. Die Messungen wurden bequemer, wenn man den Strom durch Einschaltung eines passenden Widerstandes in die Haupteitung abschwächte. Handelte es sich um Messung grösserer Widerstände, so wurde der ungeschwächte Strom des Elementes verwandt.

Als Beispiele führe ich folgende Messungen an:

- 1) Rolle A. Ihr Widerstand war früher von mir mittelst der Wiedemann'schen Bussole zu rund 60 S.-E. bestimmt worden. Die Messung mittelst des Mikrogalvanometers ergab 60,1 S.-E.
- 2) Rolle B. Secundäre Rolle eines du Bois-Reymond'schen Galvanometers.

mond'schen Inductoriums, verfertigt von Hrn. Krüger in Berlin, bezeichnet 4990 U. Ihr Widerstand ist $= 238,2$ S.-E.

3) Rolle C. Dergleichen von einem grösseren Inductorium derselben Art und von demselben Verfertiger, bezeichnet 10164 W, 734 E. Ich weiss nicht, ob das letztere den Widerstand in Siemens-Einheiten bedeuten soll. Ist dem so, dann ist die Bezeichnung falsch, denn ihr Widerstand ergab sich $= 683$ S.-E.

4) Die Rollen B und C zusammen; nach den eben angeführten Messungen $= 683 + 238,2 = 921,2$ S.-E. Die Messung ergibt genau 921,2 S.-E.

5) Heberförmiges Glasrohr, mit gesättigter Zinksulfatlösung gefüllt und in Zinksulfatlösung umgestülpt, welche in zwei, innen amalgamirten Zinktrögen enthalten ist.

Widerstand $= 7470$ S.-E.

6) Ein längeres und engeres Rohr in gleicher Anordnung. Widerstand $= 88780,5$ S.-E.

Da als Vergleichswiderstand nur 10000 S.-E. zur Verfügung standen, so ist die letztere Messung durch Verschiebung der Platinschneide auf dem Rheochorddraht bis zur Herstellung des Gleichgewichtes in der Brücke gewonnen worden.

Um eine Vorstellung von dem zu erlangenden Grade der Genauigkeit zu geben, theile ich Folgendes mit.

Bei Messung der Rolle C (683 S.-E.) verursachte nach Herstellung des Gleichgewichtes die Einschaltung von 0,1 S.-E. einen Ausschlag von 10 mm. Man hätte also eine Widerstandsänderung von 0,01 S.-E. noch sehr gut wahrnehmen können, d. h. 0,0146 Proc. des Werthes.

Bei der Combination der Rollen B und C (921,2 S.-E.) gibt 0,1 S.-E. einen Ausschlag von 6,3 mm; das ergibt eine Genauigkeitsgrenze von 0,016 S.-E. oder 0,0017 Proc.

Bei der Zinksulfatlösung von 7470 S.-E. gaben 0,1 S.-E. einen Ausschlag von 3 mm, was einer Genauigkeitsgrenze von 0,004 Proc. entspricht.

Bei der Zinksulfatlösung von 88780,5 S.-E. endlich gaben 2,0 S.-E. einen Ausschlag von 1 mm; das ergibt eine Genauigkeitsgrenze von 0,005 Proc.

In Wirklichkeit freilich ist eine derartige Genauigkeit nicht zu erreichen. Das liegt besonders an der Erwärmung der Leiter durch den Strom, welche natürlich in dem zu messenden Leiter und in den Widerstandsrollen des Rheostaten nicht in gleicher Weise verläuft. Man sieht daher, wenn man den Gleichgewichtszustand hergestellt hat, bei dauerndem Stromschluss den Magnet sich wieder in Bewegung setzen, in der einen oder der anderen Richtung, je nachdem die Erwärmung hier oder dort stärker ist. Dieser Fehler hängt nicht von dem Galvanometer ab. Im Gegentheil würde sich dasselbe bei seiner Empfindlichkeit sehr gut zur Temperaturmessung nach der Siemens'schen Methode eignen.

Dagegen ist ein anderer Fehler von der Anordnung des Instrumentes bedingt, das fortwährende Wandern des Nullpunktes nach der Astasirung durch den Hauy'schen Stab. Diesen Fehler theilt das Mikrogalvanometer mit allen auf gleiche Weise astasirten Instrumenten. Bei Nullbeobachtungen, wie die Widerstandsmessungen oder die Messung electromotorischer Kräfte sind, ist dieser Fehler freilich sehr störend.

Wenn man aber auch nur die Genauigkeit bis auf 0,1 Proc. veranschlagt, so ist das schon für die Mehrzahl der nothwendigen Messungen ausreichend.

Handelt es sich um Messungen von Inductionsrollen, so sieht man bei Stromschluss und Stromöffnung eine zuckende Bewegung des Magnets infolge des Extrastromes. Sind die Vergleichswiderstände inductionsfrei gewickelt, so erhält man nach Herstellung des Gleichgewichts diese Ausschläge ganz rein, sodass man also hiermit die Extrastrome in ähnlicher Weise demonstrieren kann, wie ich dies schon früher¹⁾ auseinandergesetzt habe.

Ebenso wie bei Widerstandsmessungen ist das Mikrogalvanometer vorzüglich geeignet für Messungen electromotorischer Kräfte nach der Compensationsmethode von Poggendorff und du Bois-Reymond. Für so kleine Potential-

1) Rosenthal, Electrotechn. Zeitschr. 4. p. 147. 1883.

differenzen, wie sie bei electrophysiologischen Untersuchungen zu messen sind, bedarf es sehr empfindlicher Apparate. Da ich das Instrument gerade für solche Zwecke construirt hatte, war ich natürlich sehr gespannt darauf, wie die Vergleichung mit der bisher für solche Versuche allgemein gebrauchten Wiedemann'schen Bussole ausfallen werde.

Der Muskelstrom eines *M. sartorius* von einem kleinen Frosch, von Aequator und Querschnitt abgeleitet, warf den Spiegel weit über den Bereich der *Scala*. Ein winziger Fetzen dieses Muskels, aus etwa drei Muskelfasern von 1 cm Länge bestehend, gab bei derselben Anordnung etwa 400 mm Ausschlag. Nach diesen Proben war ich sehr überrascht, vom Nervenstrom nur kleine Ausschläge, 20—30 mm bei sogenannter starker Anordnung (Aequator-Querschnitt) zu erhalten, also etwa ebensoviel wie Hr. du Bois-Reymond an seiner Wiedemann'schen Bussole ohne Astasirung.¹⁾ Da die electromotorische Kraft der Nerven nicht so erheblich geringer ist als die der Muskeln²⁾, so kann die geringere Empfindlichkeit unseres Mikrogalvanometers nur in dem grossen Widerstand des Nerven begründet sein. Hrn. du Bois-Reymond's Bussole hat 12000 Windungen feinen Drahtes, unser Mikrogalvanometer nur 400. Ist es bei geringen Widerständen der sonst im Kreise befindlichen Theile trotzdem der Bussole überlegen, so muss diese Ueberlegenheit mehr und mehr schwinden, je grösser diese Widerstände werden. Da bei der ersten Construction alle Anhaltepunkte für die zu wählenden Dimensionen fehlten, so ist das Instrument für die Mehrzahl der Versuche ausreichend ausgefallen, nicht aber für den Nervenstrom.

Diesem Fehler ist leicht abzuhelfen. Ich habe jetzt bei Hrn. Edelmann Rollen mit grösserer Windungszahl bestellt, und zwar sollen zwei zu einem astatischen System verbundene Magnete und vier Rollen Verwendung finden. Die Auswechselung der Magnete und Rollen ist bei der gewählten Construction leicht zu bewerkstelligen, nachdem man das

1) E. du Bois-Reymond, Gesammelte Abb. 1, p. 154. 1875.

2) l. c. 2, p. 250.

Spiegelgehäuse und die untere Verschlussplatte (*p*, Fig. 5) entfernt hat. Man wird also zu einem Universalinstrument zwei Magnete und zwei Rollenpaare nötig haben, von denen die einen für die grösste Mehrzahl der Versuche ausreichen, die anderen für Versuche über den Nervenstrom dienen werden. Ich werde über den Ausfall dieses Versuches seiner Zeit berichten.

Eines Vorzugs, welchen die Wiedemann'sche Bussole hat, entbehrt unser Mikrogalvanometer. Bei ersterer kann man, wenn stärkere Ströme beobachtet werden sollen, die Empfindlichkeit durch Entfernung der Rollen vermindern. Um denselben Zweck beim Mikrogalvanometer zu erreichen, bleibt nichts übrig, als die Einschaltung passender Nebenschliessungen. Alles in allem gerechnet, glaube ich die neue Form des Galvanometers den Physikern und Physiologen wohl empfehlen zu können. Seine Behandlung ist so einfach, dass es sich gewiss Freunde erwerben wird. Namentlich bei der Verwendung zu Demonstrationen in Vorlesungen ist sein Gebrauch sehr bequem. Man hat dann nur nötig, ein anderes Spiegelgehäuse anzubringen, welches die Entfernung eines objectiven Bildes einer seitwärts aufgestellten Lichtquelle auf einem Schirme gestattet.

Erlangen, im October 1884.

**X. Das Quadrifilar-Magnetometer,
ein neues Instrument zur Bestimmung der Variationen
der verticalen erdmagnetischen Kraft;
von Karl Schering.**

(Aus den Gött. Nachr. Nr. 7. vom 16. Juli 1884 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)
(Hierzu Taf. VIII Fig. 8—11.)

Im Jahre 1878 hatten wir, mein Bruder Ernst Schering, der Director des erdmagnetischen Observatoriums in Göttingen, und ich, durch eine neue Anwendung des dem Weber'schen Erdinductor zu Grunde liegenden Princips,

ein Instrument construirt¹⁾), welches für die Inclination der erdmagnetischen Kraft eine gleich genaue Bestimmung gewährt, wie die von Gauss angegebenen Magnetometer in ihrer jetzigen Gestalt für die Declination und die horizontale Intensität. Es beschäftigte uns seitdem die Aufgabe, für die Variationen der verticalen Intensität einen in gleichem Grade zuverlässigen Messapparat herzustellen, wie man einen solchen in dem Gauss'schen Unifilar und Bifilar in Verbindung mit der Weber'schen Hülfssnadel für die Variationen der Richtung und Stärke der horizontalen erdmagnetischen Kraft schon besitzt.

Diese Aufgabe glauben wir durch ein neues Instrument, das „Quadrifilar-Magnetometer“ gelöst zu haben, welches seit dem Herbst 1882 in dem unterirdischen Beobachtungsraum des Göttinger Observatoriums aufgestellt ist. An diesem Instrumente wurden seit dem 1. Januar 1883, in ähnlicher Weise wie an vier anderen magnetischen Variationsapparaten schon seit dem 1. August 1882, während der Terminstage, die in Göttingen gleichzeitig mit den internationalen Polar-expeditionen abgehalten sind, 24stündige Ablesungen in Pausen von fünf Minuten ausgeführt. Der Plan, gleichzeitig mit solchen Variationsbeobachtungen, in Göttingen auch Messungen der in grossen Schleifen von Telegraphenleitungen inducirten electricischen Ströme, mit den von Hrn. Geh.-Rath Dr. W. Siemens construirten Apparaten, anzustellen, konnte leider im Jahre 1883 nicht mehr zur Ausführung gelangen.

Das neue Instrument, das Quadrifilar, hat sich bei den erwähnten Beobachtungen von 1882 bis 1883 gut bewährt, und es sei daher gestattet, dasselbe hier kurz zu beschreiben.

Eine magnetische Röhre, in den Fig. 8 bis 9 mit *A* bezeichnet, von 300 mm Länge und nahe 10 mm innerem Durchmesser, aus Stahlblech von 0,5 mm Dicke angefertigt, ist in einem Schiffchen aus Aluminium so befestigt, wie die Fig. 6 und 7 es erkennen lassen. Dieses Schiffchen mit der magnetischen Röhre, die nahe 30 g schwer ist, hängt frei

1) Tagebl. d. Naturf.-Vers. in Cassel. 1878. p. 42 und Göt. Nachr. 1882. p. 345—392.

an vier feinen Messingdrähten d_1, d_2, d_3, d_4 (in Fig. 6), welche in den Punkten 1, 2, 3, 4 befestigt sind. Der Abstand der beiden Punkte 1, 2 von einander beträgt nahe 5 mm, ebenso der Abstand der Punkte 3, 4. Die vier Drähte sind bis zu den Seitenwänden des Beobachtungsraumes fortgeführt, z. B. das Drahtpaar d_1, d_2 zu der südlichen Wand, das andere Paar d_3, d_4 zur nördlichen Wand; dort ist jedes Paar über eine Rolle geleitet. Eine der beiden gleichen oberen Suspensionsvorrichtungen der beiden Drahtpaare ist in Fig. 10 im Querschnitt dargestellt. Die Schrauben g sind in eingemauerte Holzklötze eingeschraubt; r ist die Rolle von nahe 15 mm Durchmesser, in deren Einschnitt der Draht einliegt; h bezeichnet eine Axe, um welche die Platte p mit der Rolle r und also auch die Ebene der Drähte gedreht werden kann. Der directe Abstand l_1 der beiden Rollen von einander beträgt ungefähr 10450 mm, die Länge l_2 der beiden Drahtpaare zusammen mit dem Durchmesser des Schiffchens etwa 10740 mm, sodass die durch das Gewicht des Apparats gespannten Drähte um einen Winkel $\alpha = \text{arc cos } l_1/l_2$, also ungefähr um $13^\circ 20'$ gegen eine Horizontalebene geneigt sind, und ferner eine durch die Mittelpunkte der beiden Rollen gelegte, nahe horizontale, Linie um etwa 1240 mm höher als die Mitte des Magnets ist.

Wenn das Quadrifilar zur Beobachtung fertig aufgestellt ist, muss die magnetische Axe des Magnets nahe horizontal sein; dies kann erreicht werden durch eine Drehung der oberen Suspensionen um die oben erwähnte Axe h (Fig. 10). Es ist dann ersichtlich, dass eine Änderung der verticalen Componente der erdmagnetischen Kraft eine Drehung des Magnets um eine horizontale Queraxe hervorruft und also durch den Betrag dieser Drehung gemessen werden kann. Um diese Messung ausführen zu können, ist der Spiegel S (Fig. 6) an dem Schiffchen so befestigt, dass seine Ebene normal zur Längsaxe des Magnets ist. Das von diesem Spiegel reflectirte Bild einer verticalen Scala, die von dem Spiegel etwa 6474 mm entfernt ist, wird mit einem Fernrohr beobachtet.

Durch jene Drehung des Magnets um eine horizontale Queraxe wird aber eine ungleiche Spannung der Drähte hervorgerufen; um diese sofort wieder nahezu auszugleichen, ist die Verbindungslinie 1, 2 (in Fig. 6) der Enden des einen Drahtpaars rechtwinklig zu der Verbindungslinie 3, 4 des

anderen Paars. Dadurch ist dem Magnet eine Bewegung gestattet, welche man in eine Drehung um die Längsaxe und eine andere um die verticale Queraxe zerlegen kann. Diese Drehungen ändern aber nicht die Höhe des im Spiegel *S* reflectirten Bildes der verticalen Scala und also auch nicht die Ablesung an dem horizontalen Faden des Fadenkreuzes im Fernrohr.

Ein zweites Bild derselben Scala, gesehen neben dem ersten Bilde in einem zweiten Spiegel, der auf einem grossen, fundamentirten Steinsockel befestigt ist, dient ferner zur Controle für die ungeänderte Stellung des Fernrohrs. Dieser Stein bildet gleichzeitig die Unterlage für den Kupferdämpfer, der den Magnet des Quadrifilars eng umgibt und aus mehreren horizontal liegenden in der Mitte nach oben ausgebo-genen Kupferplatten besteht.

Zum Schutz gegen Luftströmungen ist das Instrument und auch die Drähte ihrer ganzen Länge nach von Holzkästen umschlossen.¹⁾

Die Veröffentlichung der vollständigen Theorie des Quadrifilar-Magnetometers wird bei einer anderen Gelegenheit erfolgen. Zur Reduction der Terminsbeobachtungen am Quadrifilar auf absolutes Maass genügt die Kenntniss einer Constanten *C*, welche gleich derjenigen Aenderung der verticalen erdmagnetischen Kraft ist, die eine Standänderung des Quadrifilars um einen Scalentheil verursacht. Diese Constante *C* kann aus den Ablenkungen berechnet werden, welche ein Magnet von bekanntem Momente in verticaler Stellung auf die Nadel des Quadrifilars in gemessenen Entfernung hervorruft. Aus solchen Beobachtungen (10. Jan. 1883) hat sich ergeben:

$$C = -0,000\,414,$$

wenn die Gauss'schen Einheiten, das Millimeter, Milligramm und die Secunde mittlerer Zeit zu Grunde gelegt werden. Das Minuszeichen deutet an, dass bei der damaligen Stellung der Scala wachsenden Zahlen derselben abnehmende Intensität entsprach. Wenn daher am Quadrifilar eine Aenderung der Ruhelage um $(Q - Q_0)$ Scalentheile beobachtet ist, so ergibt die Gleichung:

$$-4,14 \cdot (Q - Q_0) = \delta V \cdot 10000,$$

1) Das Quadrifilar ist in der mechanischen Werkstätte von Bartels und Diederichs in Göttingen angefertigt.

die entsprechende Aenderung δV der verticalen Componente in Gauss'schen absoluten Einheiten.

Auf der linken Seite dieser Gleichung ist noch ein Correctionsglied hinzuzufügen, wenn während einer längeren Beobachtungsreihe eine Aenderung der Temperatur des Instruments eingetreten ist; denn dadurch wird das magnetische Moment eine Ab- oder Zunahme erlitten haben, es kann aber dadurch auch der Schwerpunkt des Instruments seitlich verschoben und infolge dessen eine Drehung eingetreten sein. Um eine solche Verschiebung so klein wie möglich zu machen, ist dem Schiffchen eine vollständig symmetrische Gestalt in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt M (Fig. 7) der Röhre gehende, zur Längsaxe des Magnets senkrechte Ebene gegeben. Ferner ist die Platte m , m_1 des Schiffchens aus Messing (s. Fig. 7) und die beiden Platten a , a_1 aus Aluminium so lang genommen, dass bei einer gleichen Temperaturänderung aller Theile des Apparats der Mittelpunkt M der magnetischen Röhre (der Rechnung nach) sich nicht verschiebt, wenn diese Röhre nur durch eine der beiden Schrauben s (Fig. 7 und 9) am Schiffchen festgeklemmt, die andere Schraube s aber so lose angezogen ist, dass die sich ausdehnende oder zusammenziehende Röhre darunter hinweggleiten kann.

Die Temperaturcorrection wird in Göttingen ermittelt werden durch die Vergleichung der aus den Ablesungen am Quadrifilar direct sich ergebenden Variationen δV , mit denjenigen, welche aus den reducirten Ablesungen am Bifilar und an der Weber'schen Hülfsnadel in Verbindung mit den gleichzeitig an den Terminstagen wiederholt (sechs- bis vierzehnmal) ausgeführten Inclinationsbestimmungen berechnet werden können. Diese absoluten Inclinationsmessungen mit dem Erdinductor nach der oben erwähnten seit 1878 in Göttingen gebräuchlichen Methode¹⁾ geben bis auf wenige Bogensecunden genaue Werthe und gestatten daher eine solche Verwendung zur Controle von Variationsinstrumenten. In Zukunft wird ein Hülfsmagnet aufgehängt werden, auf welchen der Magnet des Quadrifilars wirken wird, und dessen Stand zur Bestimmung der Aenderung des Stabmagnetismus dienen soll, wie gegenwärtig der Weber'sche Hülfsmagnet bei dem Bifilar.

Abgesehen von solcher unvermeidlichen Temperatur-

1) Schering, Göt. Nachr. 1882. p. 345.

correction sind aber die Standänderungen des Quadrifilars direct proportional den Aenderungen der verticalen Componente. Hierdurch zeichnet es sich wesentlich vor dem Instrument mit „Verticalen Deflectoren“ aus, welches von Lloyd im Jahre 1842 zuerst construirt ist.¹⁾ Bei diesem Apparat wird der Stand der Nadel zwischen den verticalen Eisenstäben aussér von den Aenderungen der verticalen Componente auch von denjenigen der horizontalen Intensität und der Declination beeinflusst. Ein solches Instrument, nach dem Lloyd'schen Princip ausgeführt, aber mit besonderen Vorrichtungen zur genaueren Bestimmung der Constanten versehen, ist seit Sommer 1882 im Göttinger Observatorium aufgestellt und an sämtlichen 26 Terminen der Jahre 1882 und 1883 beobachtet. Für dieses Instrument lautet die Reductionsformel auf Zehntausendstel der Gauss'schen Einheit:

$10000 \cdot \delta V = 4,16 (A - A_0) + 4,07 (B' - B_0) - 3,97 (U - U_0)$,
wenn $A - A_0$ die Aenderung der Ruhelage in Scalentheilen an dem Instrumente mit den verticalen Deflectoren:

$B' - B_0$ diejenige am Bifilar,

$U - U_0$ diejenige am Unifilar

bedeutet. Es sind also, bei Benutzung der „Verticalen Deflectoren“ drei Variationsapparate nothwendig, um die Aenderung der verticalen Componente berechnen zu können; genau genommen werden die Angaben sogar von vier Magneten dazu benutzt, da $B' - B_0$ nicht die unmittelbaren Aenderungen des Bifilars, sondern die mit den Ablesungen an der Weber'schen Hülfsnadel corrigirten bedeutet.

Zur Vergleichung der mit dem Quadrifilar und den „Verticalen Deflectoren“ erhaltenen Resultate sind in der beigefügten Fig. 11 drei Curven nach den im magnetischen Termin 1. Febr. 1883 ausgeführten Ablesungen gezeichnet. Aus den Curven I und II ersieht man, dass die Nadel der „Verticalen Deflectoren“ im ganzen um 170 Scalentheile sich bewegt hat, dass aber der bei weitem grösste Theil dieser Bewegung durch Aenderungen der Declination und horizontalen Intensität verursacht ist; denn das Resultat der Rechnung, (die Curve II), ergibt die gesamte Variation der verticalen Componente V nur zu etwa 0,0062 Gauss'schen

1) H. Lloyd, Proc. of the Roy. Irish Acad. Dublin. 2. p. 210 bis 217. 1842.

Einheiten. Diese Änderung würde durch eine Bewegung der Nadel der „Verticalen Deflectoren“ um etwa 15 Scalenteile angezeigt worden sein, wenn die übrigen erdmagnetischen Elemente constant geblieben wären. Dagegen gibt die Gesamtbewegung um etwa 14 Scalenteile am Quadrifilar direct die Änderung von V um etwa 0,0062 Einheiten an.

Die plötzliche Erhebung der Curve II bei $4^h 15^m$ würde verschwinden, wenn die gleichzeitige Ablesung am Bifilar genau um fünf Scalenteile anders lautete, als sie im Beobachtungsbuch verzeichnet ist; da die übrigen Variationsinstrumente zu dieser Zeit keine plötzliche Bewegung der Magnete gezeigt haben, so ist es wahrscheinlich, dass die Ablesung am Bifilar um fünf Scalenteile unrichtig ist.

Bei der Vergleichung der beiden Curven II und III, welche im wesentlichen übereinstimmen, ist zu berücksichtigen, dass die Temperaturcorrection an den diesen Curven zu Grunde liegenden Werthen noch nicht angebracht sind.

Das Quadrifilar hat mit der Lloyd'schen Waage¹⁾ und mit dem von Hrn. Wild angegeben „Verticalmagnetometer“²⁾ bei welchem „statt der scharfen Kante oder Schneide der Lloyd'schen Waage zwei horizontal ausgespannte Drähte als Drehungsaxe dienen“, die Eigenschaft gemeinsam, dass die Standänderungen des Magnets nur durch die Variationen der Verticalkomponente beeinflusst werden. Dagegen hat das Quadrifilar vor der Lloyd'schen Waage den Vorzug, eine vollständig von den störenden Einflüssen der Reibung freie Drehungsaxe zu besitzen. Ferner übt bei dem Quadrifilar infolge der doppelt bifilaren Aufhängung die Torsion der Drähte nur einen sehr geringen Einfluss auf den Stand des Magnets aus, während bei dem „Verticalmagnetometer“ die so variable elastische Nachwirkung mit ihrem vollen Betrage in dem Drehungsmomente sich geltend macht. Schliesslich hat bei der Aufhängung an vier Drähten eine seitliche Verschiebung des Schwerpunktes, infolge von Temperaturänderungen, eine geringere Drehung des Magnets zur Folge, als bei einer durch zwei Drähte oder eine Schneide gebildeten horizontalen Drehungsaxe.

Strassburg, im Mai 1884.

1) Lloyd, Proc. of the Roy. Irish Acad. 1. p. 334. 1838/9.

2) Wild, Bull. de l'Acad. Imp. d. Scienc. de St. Petersb. 17. p. 456—465. 1872.

Namenregister zum Jahrgang 1884.

A.

Andreae, J. L., Boyle'sches Gesetz 12, 134.

B.

Baur, C., Akustik 23, 150.
v. Beetz, W., Normalelemente für electrometrische Messungen 23, 402.
Bender, C., Salzlösungen 22, 179.
v. Bezold, W., Zusammenhang zwischen Temperatur eines glühenden Drahtes und Zusammensetzung des von ihm ausgehenden Lichtes 21, 175. — Brechung von Strom- und Kraftlinien an der Grenze verschiedener Mittel 21, 401. — Perspektivische Täuschung 23, 351. — Dielectrische Ladung und Leitung 23, 426.

Blasius, E., Ausdehnung der Kry-
stalle durch die Wärme 22, 528.
Blümcke, A., Einfluss des Concentrationsgrades auf die speci-
fische Wärme wässriger und
alkoholischer Lösungen von Metall-
chloriden 23, 161. — Specificisches
Gewicht solcher Flüssigkeiten,
deren Existenz an das Vorhanden-
sein hoher Drucke gebunden ist
23, 404.

Bodyński, J., Wheatstone's Rheo-
stat mit Quecksilbercontact 22, 463.
Boekmann, O., Electricischer Wider-
stand des Mikrophonkohlencon-
tacts während der Bewegung
23, 651.

Boltzmann, L., Bartoli's Beziehung
der Wärmestrahlen zum zweiten
Hauptsatze 22, 31. — Arbeits-
quantum bei chemischen Verbin-
dungen 22, 39.

Boltzmann, L., Stefan'sches Ge-
setz, betreffend die Abhängigkeit
der Wärmestrahlung von der
Temperatur, abgeleitet aus der
electromagnetischen Lichttheorie
22, 291.

Budde, E., Thermoelectriche
Kräfte 21, 277.
Bunsen, B., Verdichtung der Koh-
lensäure an blanken Glasflächen
und Kayser's Einwürfe dagegen
22, 145.

C.

Christiansen, C., Emission der
Wärme von unebenen Oberflächen
21, 364. — Optische Eigenscha-
ften von fein vertheilten Körpern
23, 298.

Clausius, R., Kraftübertragung
durch dynamoelectriche Maschi-
nen 21, 385.

Cohn, E., Gültigkeit des Ohm'schen
Gesetzes für Electrolyte 21, 646.
Czapski, S., Thermische Verän-
derlichkeit der electromotorischen
Kraft galvanischer Elemente und
ihre Beziehung zur freien Energie
derselben 21, 209.

D.

Dieterici, C., s. König.
Dorn, E., Einfluss des Extrastro-
mes auf die Bewegung eines Mag-
netes innerhalb eines dämpfenden
Multiplicators 22, 265. — Stöpsel-
rheostaten von Siemens u. Halske
22, 558.

E.

Electricische Einheiten und Lichtein-
heiten 22, 616.
Elsas, A., Erzwungene Schwin-
gungen gespannter Saiten 23, 173.

Elster, J., u. H. Geitel, Electrität der Flamme 22, 123.

F.

Fröhlich, J., Potentiale von Rollen 22, 117. — Polarisation des gebogenen Lichtes 22, 161.

Frölich, O., Sonnenwärme 21, 1. Fromme, C., Aenderungen des Molecularzustandes des Eisens durch Glühen und Ablöschen 22, 371.

Fuchs, F., Compensationsmethode zur Bestimmung des Widerstandes des unpolarisirbarer Elemente 21, 274. — Kleine akustische Versuche 21, 513.

G.

Grunmach, L., Absolute barometrische Bestimmungen unter Controle des Vacuums durch elektrische Lichterscheinungen 21, 898.

H.

Hallwachs, W., Electromotorische Kraft, Widerstand und Nutzeffect von Ladungssäulen 22, 84.

Hankel, W., Bei Gasentwickelungen auftretende Electricitäten 22, 387.

Hansmann, G., Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand 21, 545.

Henrichsen, S., s. Wleügel.

Hertz, H., Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten 22, 449. — Beziehungen zwischen den Maxwell'schen electrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegenwärtigen Electrodynamik 23, 84.

Himstedt, F., Zwei verschiedene Formen eines selbstthtigen Disjunctors 22, 276. — Methode zur Bestimmung des Ohm 22, 281.

Hittorf, W., Electricitätsleitung der Gase 21, 90.

Hoffmann, P., Strömung der Luft durch Röhren von beliebiger Länge 21, 470.

Holtz, W., Vorlesungsversuch zum Beweise des Satzes, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit wächst, wenn kreisende Massen der Axe genähert werden 21, 383.

K.

Kayser, H., Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen 21, 495. — Verdichtung der Kohlensäure an Glasflächen und ihre Diffusion durch Fettschichten 23, 416.

Ketteler, E., Erwiderung auf Hrn. Voigt's Kritik 21, 178. — Dispersionstheorie des Lichtes 21, 199. — Dispersion des Quarzes 21, 438. — Probleme, welche die Neumann'sche Reflexionstheorie nicht lösen zu können scheint. Die Metall- und Totalreflexion der doppeltbrechenden Medien 22, 204. — Duplik gegen Hrn. W. Voigt 22, 217. — Metall- und Totalreflexion der isotropen Medien im Sinne des Neumann'schen Systems 22, 589.

Kirchhoff, G., Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand 21, 563.

Kirn, C., Quecksilberunterbrecher, bei welchem die Oxydation des Quecksilbers vermieden ist 22, 135.

v. Klobukow, N., Bestimmung der Dampfdichte niedrig siedender Körper 22, 465. — Desgleichen hochsiedender Körper 22, 493.

König, A., Dichromatische Farbensysteme 22, 567.

König, A., u. C. Dieterici, Empfindlichkeit des normalen Auges für Wellenlängenunterschiede des Lichtes 22, 579.

Kohlrausch, F., Polabstand, Induktions- und Temperaturcoefficient eines Magneten und Bestimmung von Trägheitsmomenten durch Bifilaruspension 22, 411. — Zu einigen kritischen Bemerkungen des Hrn. Wild 23, 344. — Mitführungstheorie der Thermoelectricität 23, 477.

Kollert, J., Electrisches Verhalten der Flamme 21, 244. — Electricität der Flamme 22, 456.

Koosen, J. H., Depolarisirende Wirkung des Broms in der Kette 23, 348.

Krebs, G., Drei Ozonapparate 22, 139. — Beweis des Satzes von Avogadro 23, 295. — Vorlesungsversuche über die Beziehung zwischen dem durch Reflexion und

dem durch Brechung erzeugten polarisierten Licht 22, 612.
 Krüger, R., Abhängigkeit des von einer Influenzmaschine erster Art gelieferten Stromes von der Feuchtigkeit 22, 252.
 Kundt, A., electromagneticische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel 23, 228.

L.

Langley, S. P., Wellenlängen im unsichtbaren prismatischen Spectrum 22, 598.
 Lehmann, O., Electrische Entladung in Gasen 22, 305.
 Lehnebach, A., Erzeugung stehender Wellen an Fäden 23, 157.
 Lommel, E., Fluorescenz des Kalkspat 21, 422. — Gefrierapparat 22, 614.
 Lorberg, H., Electrostriction 21, 300.
 Lummer, O., Interferenzerscheinung an planparallelen Glasplatten und Methode, die Planparallelität solcher Gläser zu prüfen 23, 49. — Interferenzerscheinung 23, 518.

M.

Mack, K., Pyroelectrisches Verhalten des Boracits 21, 410.
 Melde, F., Akustische Experimente und Untersuchungen 21, 452.
 Menges, C. L. R. E., Unterbrechung des Stromes in einer Atmosphäre von Wasserstoff 23, 156.
 Merczinger, H., Fresnel's Wellenlängenmessungen 22, 129.
 Meyer, H., Magnetisierungsfunktion des Stahles 22, 286. — Messdraht der Wheatstone-Kirchhoff'schen Brückencombination 22, 460.
 Müller-Erzbach, W., Wasserdampf von wasserhaltigen Salzen 23, 607.
 Muraoka, H., Japanische magische Spiegel 22, 246.

N.

Narr, F., Eindringen der Electrität in Gase 22, 550.
 Neesen, F., Einfluss der Magnetisierung auf den Leitungswiderstand magnetischer Flüssigkeiten; Bestimmung des Leitungswiderstandes von Electrolyten 23, 482.

O.

Oberbeck, A., Electrische Schwingungen; Polarisation dabei 21, 139. — Electrische Schwingungen; magnetische Wirkung 21, 672. — 22, 73.

Overbeck, R., Entstehung thermoelectricischer Ströme in einem aus derselben Substanz bestehenden Leiter 22, 344.

P.

Pfeiffer, E., Electrische Leitfähigkeit des kohlensauren Wassers und Methode, Flüssigkeitswiderstände unter hohen Drucken zu messen 23, 625.

Pierre, V., Gesetze der Zugelastizität 22, 141. — Veranschaulichung des Entstehens einer Longitudinalwelle 22, 142. — Galvanoskop für Vorlesungsversuche 22, 143. — Apparat zum Gefrieren des Wassers unter dem Recipienten der Luftpumpe 22, 143.

Pirani, E., Galvanische Polarisation 21, 64.

Planck, M., Theorie der Flüssigkeitsstrahlen 21, 499.

R.

Riecke, E., Electrodynamische Kettenlinie 23, 252.

Röntgen, W. C., Einfluss des Druckes auf die Viscosität der Flüssigkeiten, speciell des Wassers 22, 510. — Absorption von Wärme durch Wasserdampf 23, 1, 259.

Rosenthal, J., Galvanometer 23, 677.

Rother, O., Capillaritätsbestimmungen von Salzlösungen und deren Gemischen 21, 576.

S.

Sachs, J., s. Warburg.

Schering, K., Quadrifilar-Magnetometer 23, 686.

Schneebeli, H., Untersuchungen über strahlende Wärme 22, 430.

Schrauf, A., Dispersionsäquivalent von Diamant 22, 424.

Schumann, O., Reibungsconstante von Gasen und Dämpfen und ihre Abhängigkeit von der Temperatur 23, 353.

Sieben, G., Abhängigkeit der Brechungsexponenten anomaler disper-

girender Medien von der Concentration der Lösung und der Temperatur 23, 312.
 Siemens, W., Darstellung der von der Pariser Conferenz angenommenen Lichteinheit 22, 304.
 Stefan, J., Berechnung der Inductioncoeffizienten von Drahtrollen 22, 107.
 Stenger, F., Wärmeleitungsfähigkeit des Turmalins 22, 522.

T.

Toepler, A., Bestimmung der magnetischen Horizontalintensität mittelst der Wage 21, 158.
 Tschirch, A., Chlorophyll und einige Derivate 21, 370.

V.

Velten, A. W., Specifische Wärme des Wassers 21, 31.
 Vierordt, K., Schallstärken des Schallpendels 21, 509.
 Vogel, H. C., Messung der Sonnenwärme 21, 615.
 Voigt, W., Kirchhoff'sches Princip und Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze circularpolarisirender Medien 21, 522. — Duplik gegen Hrn. E. Ketteler 21, 584. — Nobili-Guébhard'sche Ringe 21, 710. — Absorbirende isotrope Medien und optische Eigenschaften der Metalle 23, 104. — Berichtigung zu der Duplik Hrn. E. Ketteler's 23, 159. — Electromagnetische Drehung der Polarisationsebene 23, 493. — Dispersion und Absorption, optische Eigenschaften des festen Fuchsins 23, 554. — Absorption des Lichtes in Krystallen 23, 577. — Verzögerung beim Durchgang des Lichtes durch eine Platte 22, 226. — Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Schicht eines circularpolarisirenden Mediums 22, 237.

W.

v. Waltenhofen, A., Unsymmetrische Thermosäulen 21, 380.
 Warburg, E., Electrolyse des festen Glases 21, 622.
 Warburg, E., u. J. Sachs, Einfluss der Dichtigkeit auf Viscosität tropfbarer Flüssigkeiten 22, 518.
 Weber, C. L., Galvanische Leitungsfähigkeit und thermoelectrische Stellung von Amalgamen im Zusammenhang mit der Veränderlichkeit der Structur 23, 447.
 Weber, W., Bohnenberger'sches Reversionspendel 22, 439.
 Weinstein, B., Potential von Rollen 21, 329.
 Wesendonck, K., Spectra des Fluorsiliciums und des Siliciumwasserstoffes 21, 427. — Diathermansie von Aesculinlösungen 21, 548.

Weyrauch, J. J., Schallgeschwindigkeit 23, 147.
 Wiedemann, E., Apparatur Untersuchung der Brechung des Lichtes von Ibs al Haitam 21, 541.
 Wild, H., Siemens'sche Widerstandseinheit in absolutem elektromagnetischen Maasse 23, 66.
 Winkelmann, A., Diffusion von Gasen und Dämpfen 22, 1, 151. — Diffusion homologer Ester in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure 23, 203.
 Wlefügel, S., u. S. Henrichsen, Magnetismus organischer Körper 22, 121.
 Wüllner, A., Dispersion ultraroter Strahlen 23, 306. — Bemerkung zu Hrn. W. Voigt's Abhandlung „Theorie der absorbirenden isotropen Medien“ 23, 511.

Berichtigungen.

Bd. XXIII. (W. Voigt) p. 495 Z. 7 v. u. lies $p_{kk} = 0$ statt $p_{kh} = 0$.
 p. 503 Z. 3 und 4 v. u. lies r statt u .

Maasse
magne-
tischen
4, 518.

asymme-
360.
es festen

is, Ein-
icositid
22, 518.
che Lei-
noelectri-
amen im
eränder-
447.
ger'sches
9.
tial von

ctra des
Silicium-
Diather-
ngen 21.

geschwin-

zur Unter-
es Lichtus
541.

o Wider-
tem elec-
23, 665.
usion von
2, 1. 182.
Ester in
Kohlen-

richses,
er Körper

ultrarother
Bemerkung
obhandlung
enden in
1.

$h = 0.$
 $\ell.$

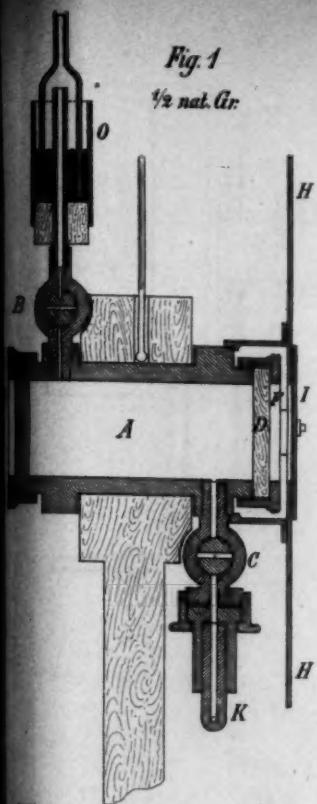


Fig. 1
 $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

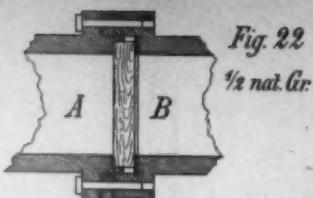


Fig. 22
 $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

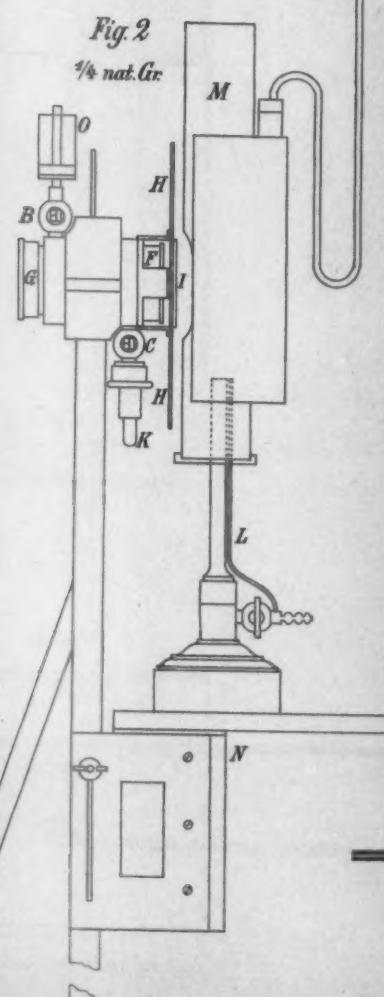
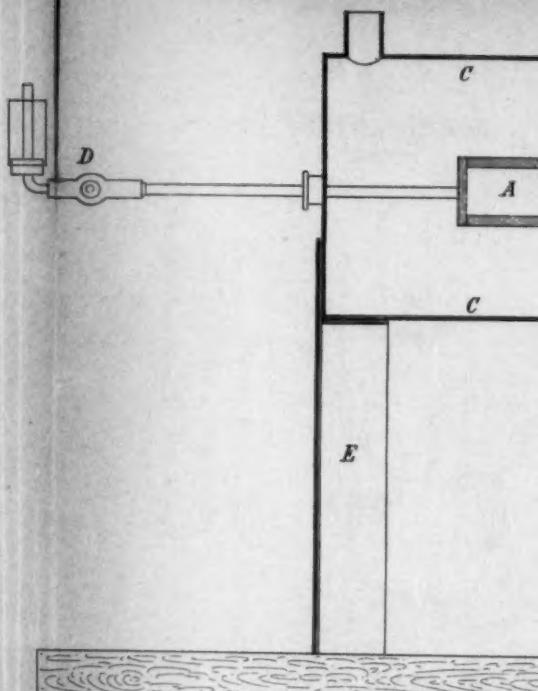


Fig. 2
 $\frac{1}{4}$ nat. Gr.



verticaler Schnitt

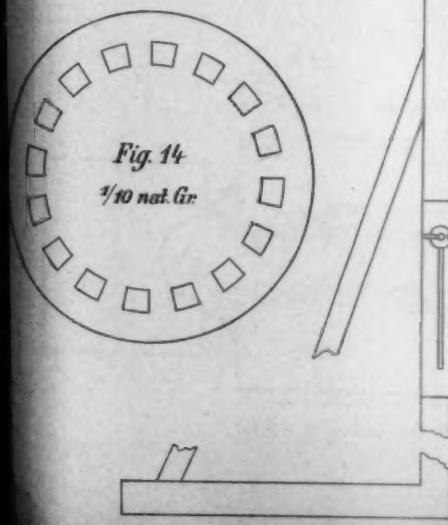
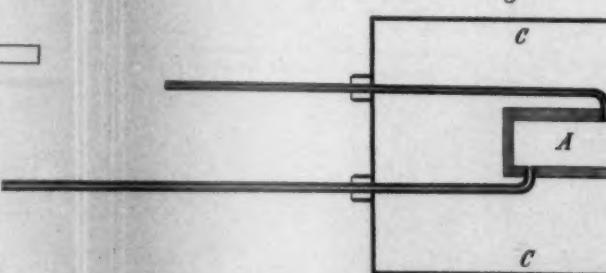
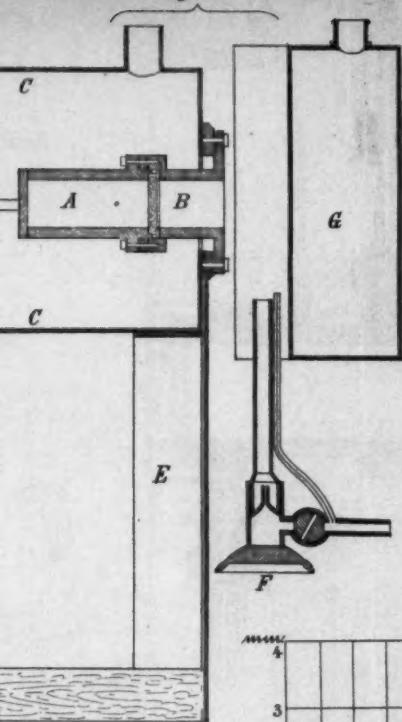


Fig. 14
 $\frac{1}{10}$ nat. gr.



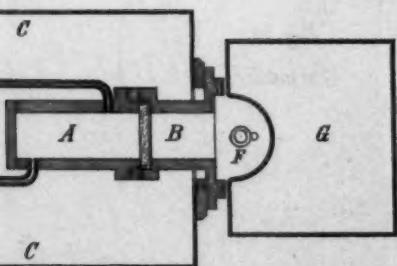
horizontaler Schnitt

Fig. 20



Schnitt 1/4 nat.Gr

Fig. 21



Schnitt 1/4 nat.Gr

Fig. 3
1/4 nat.Gr

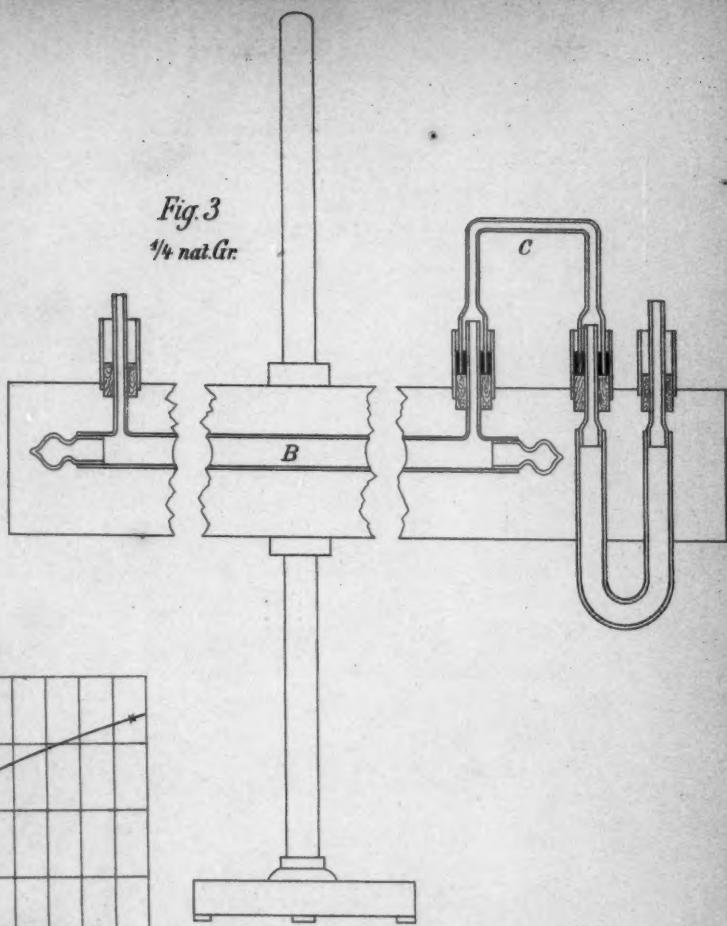


Fig. 12

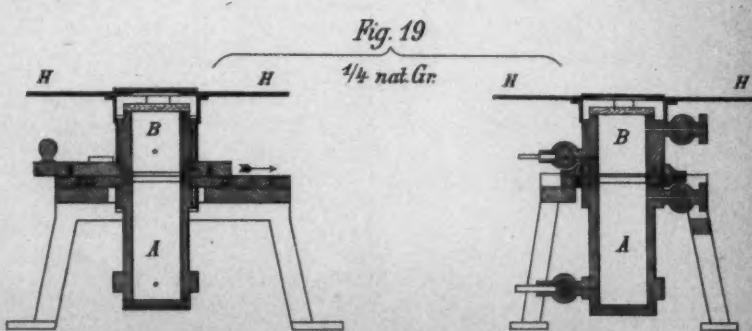
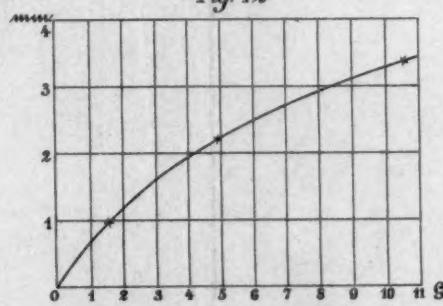


Fig. 19

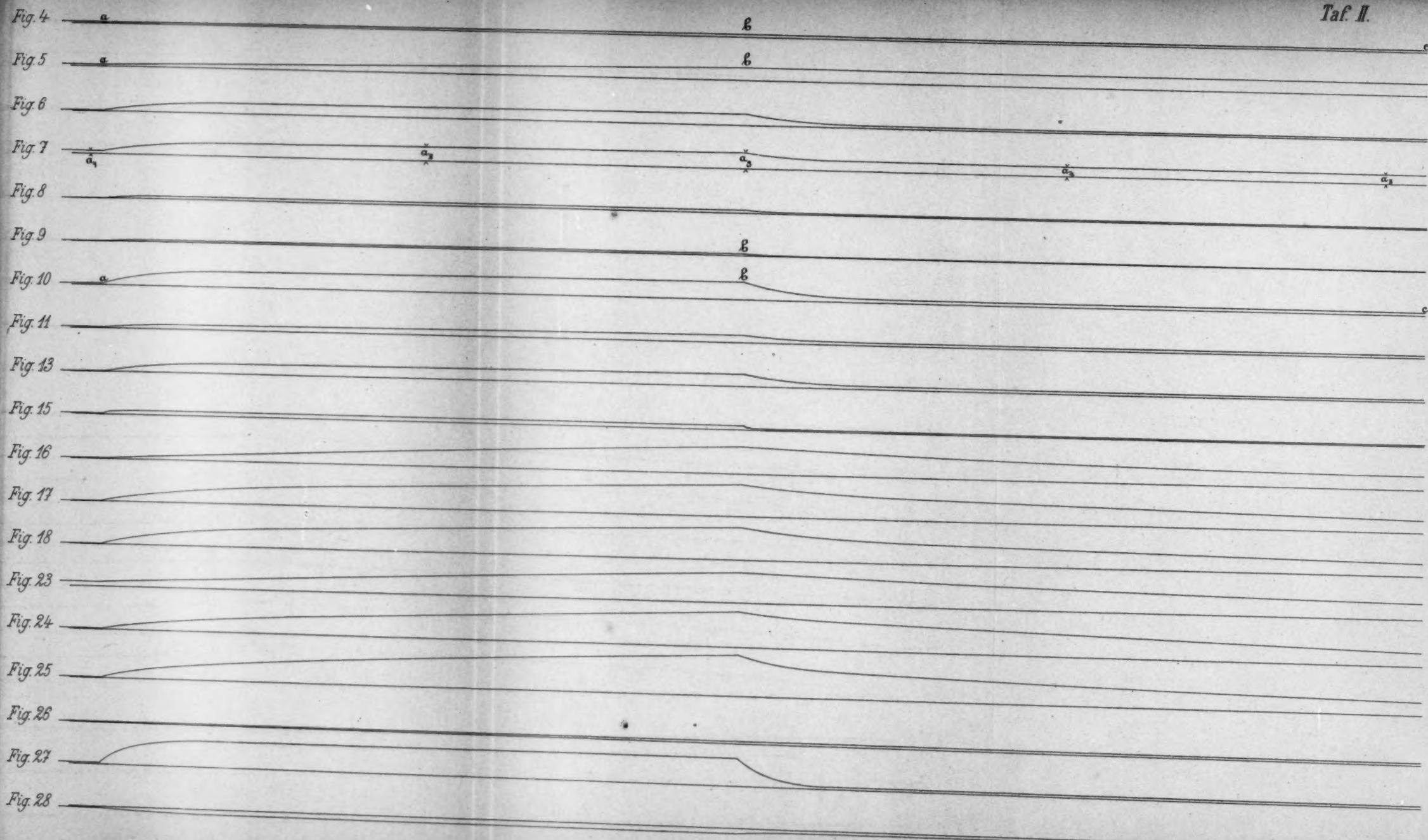


Fig. 1.

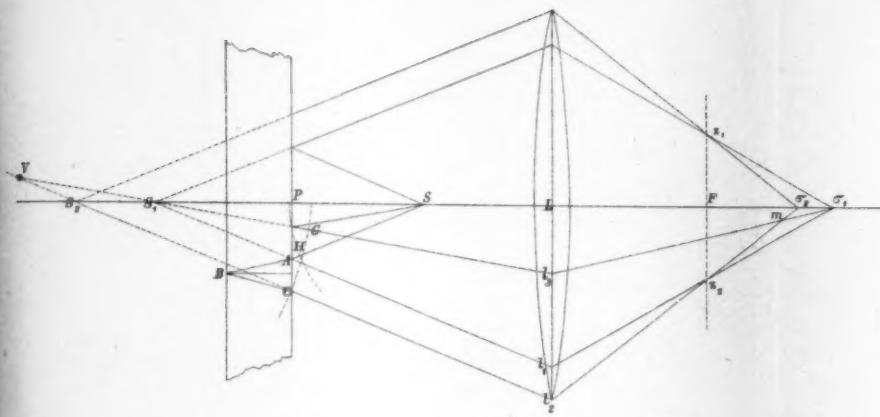


Fig. 2.

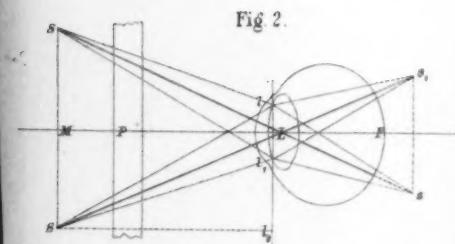


Fig. 3.

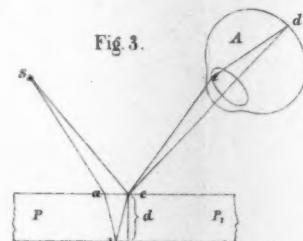
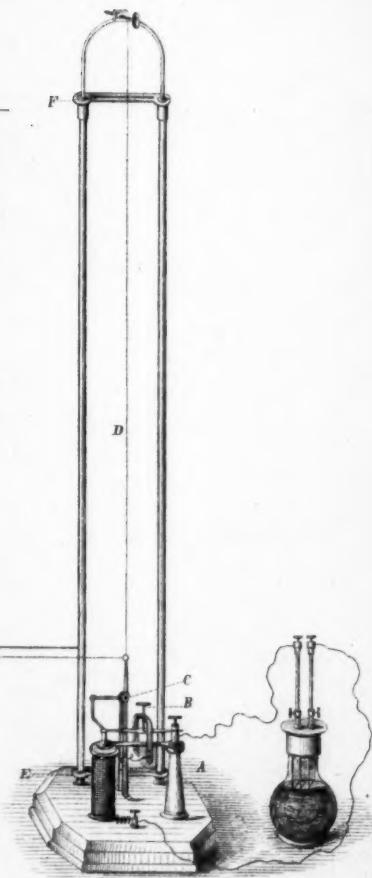
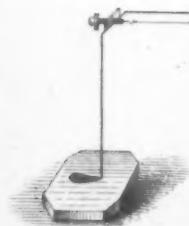
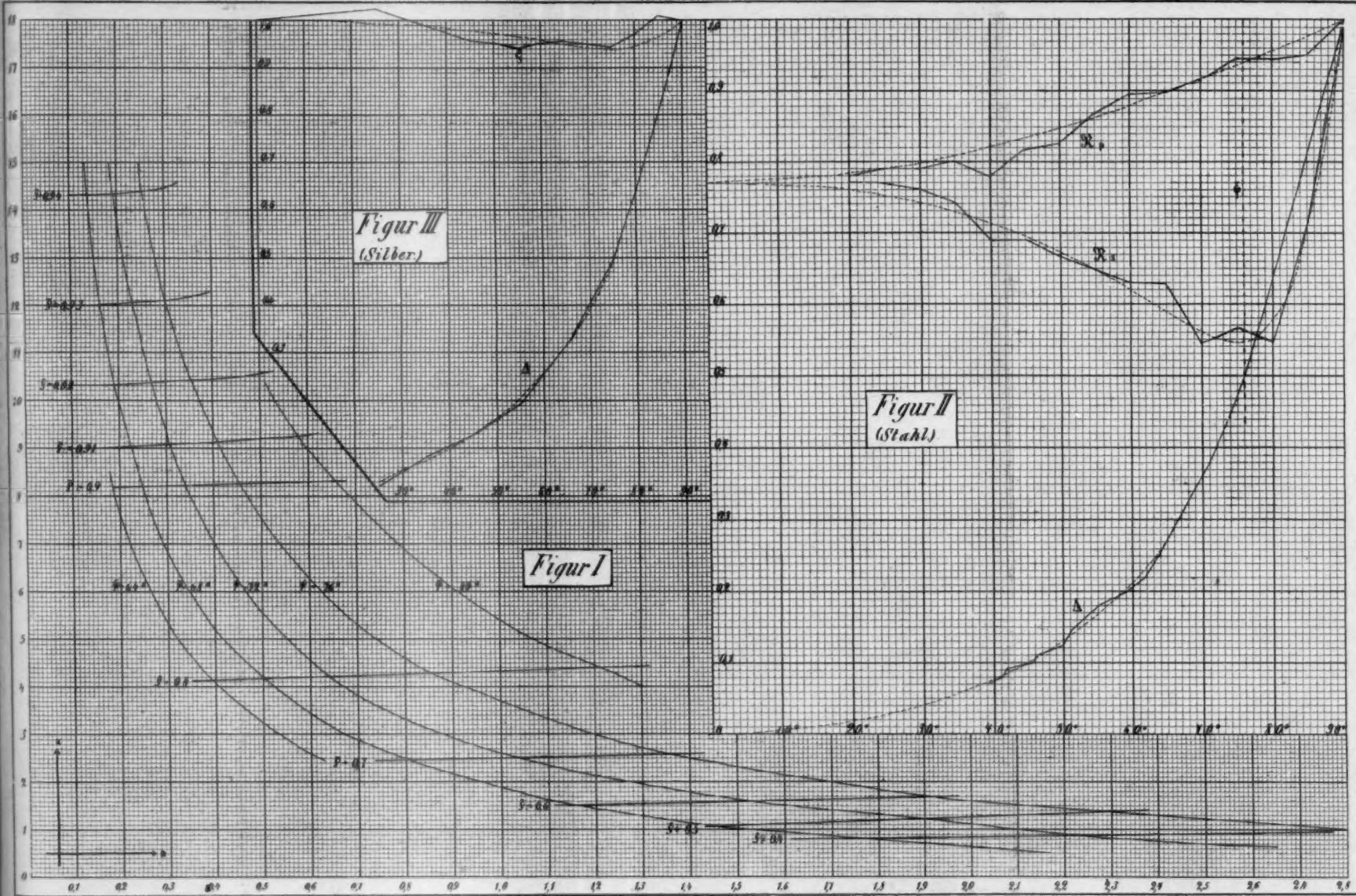
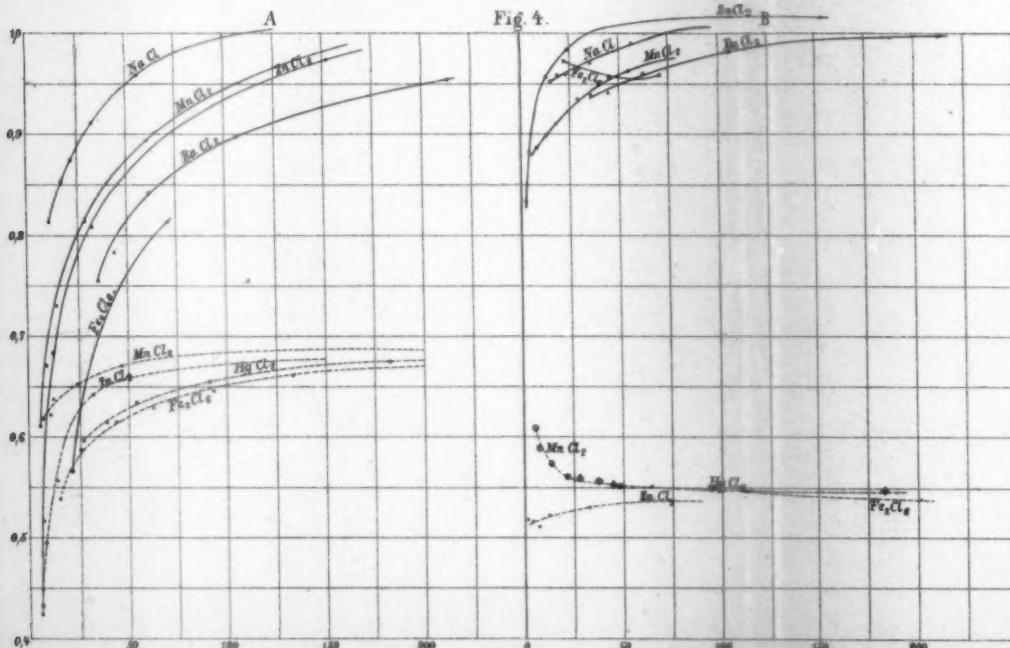
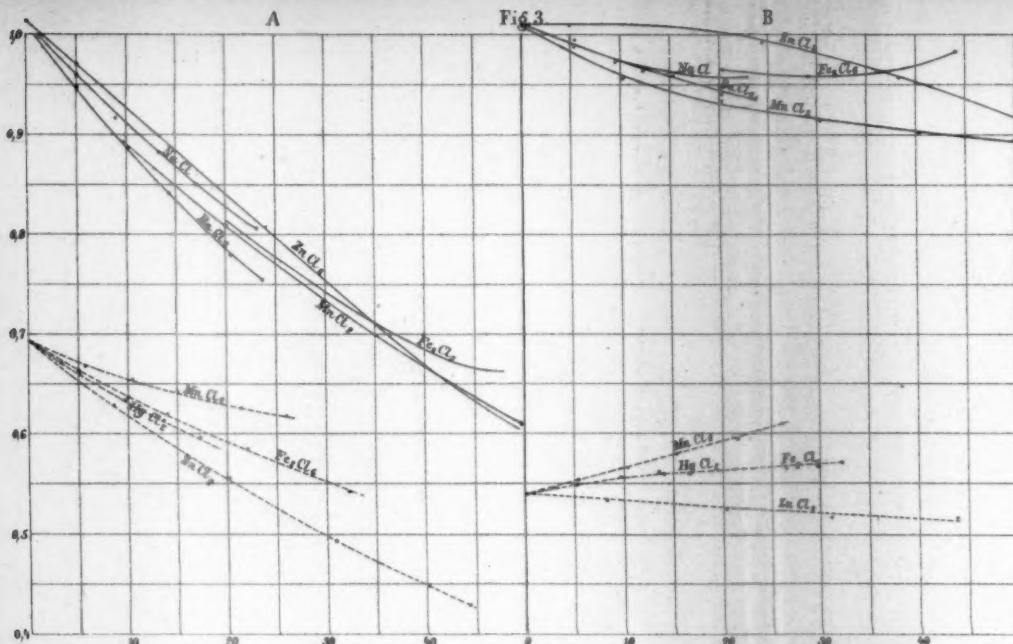


Fig. 4.



Lummer Fig 1-3. A. Lehnebach Fig 4.





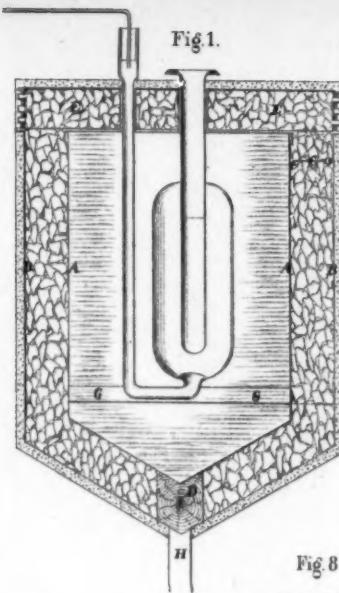


Fig. 1.

Fig. 2.



Fig. 10.



Fig. 11.



Fig. 12.

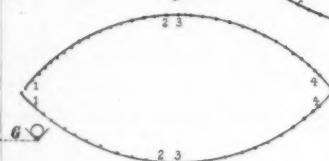


Fig. 13.

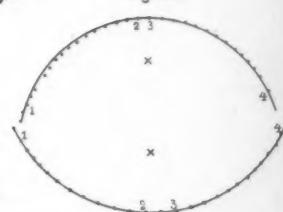


Fig. 8.

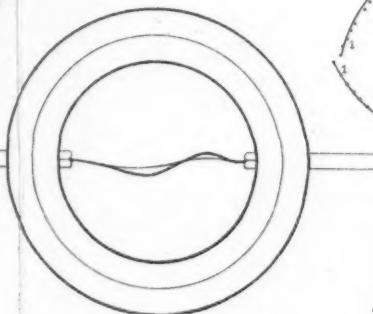


Fig. 14.

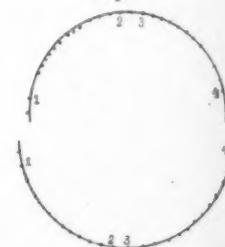


Fig. 9.

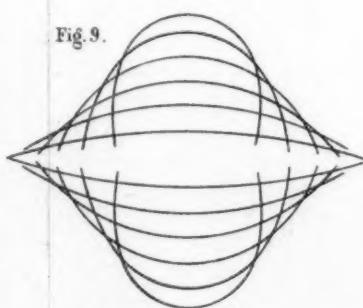


Fig. 15.



Fig. 6.



Fig. 5.

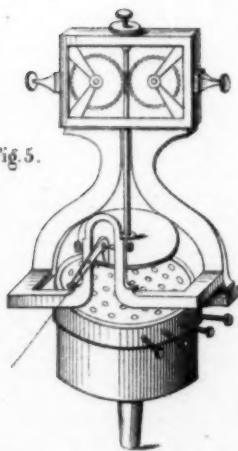
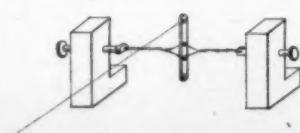


Fig. 7.



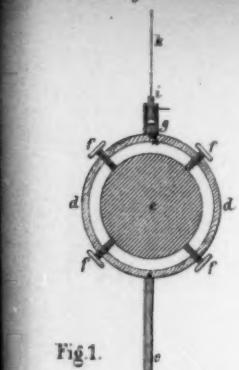


Fig. 1.

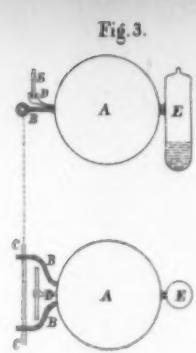


Fig. 3.

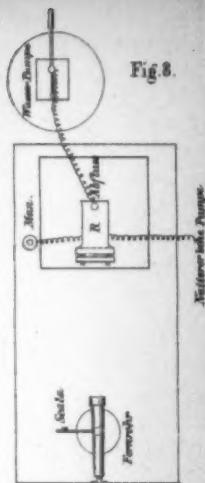


Fig. 8.

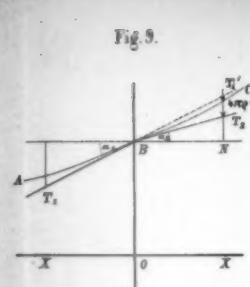


Fig. 9.

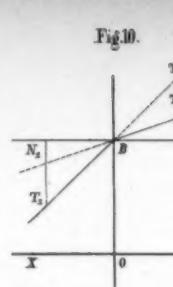


Fig. 10.

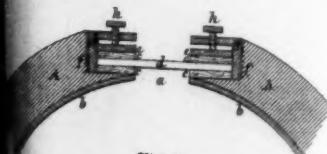


Fig. 2.

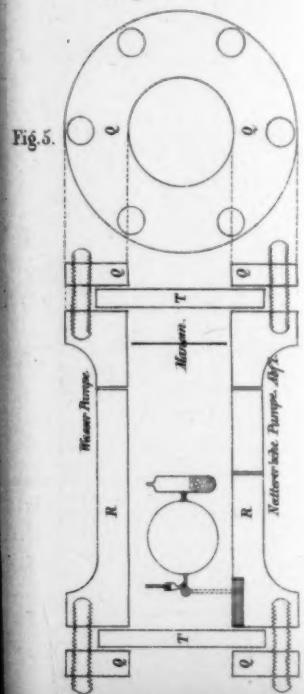


Fig. 5.

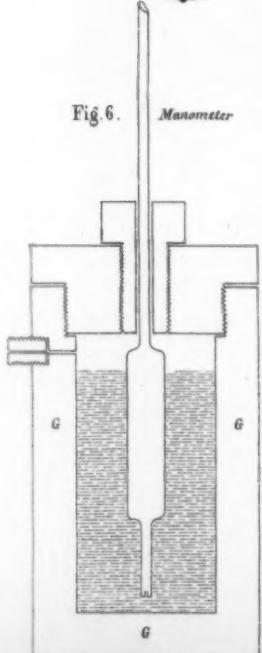


Fig. 6. Manometer

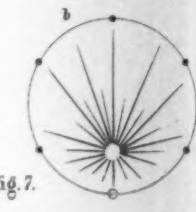


Fig. 7.

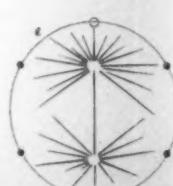
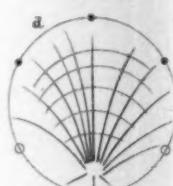
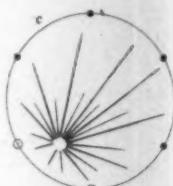


Fig. 11.

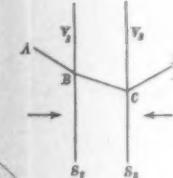


Fig. 12.

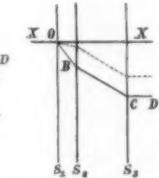


Fig. 13.

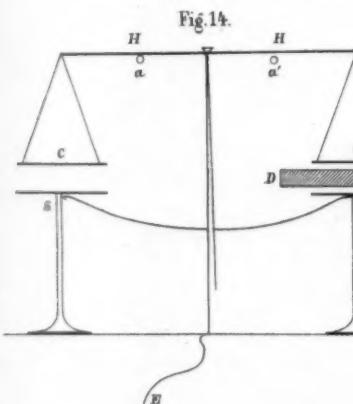


Fig. 14.

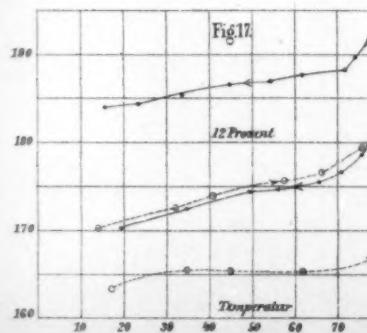


Fig. 17.

Fig. 10.

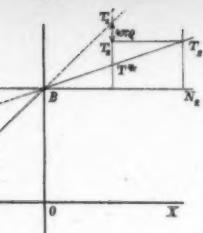


Fig. 13.

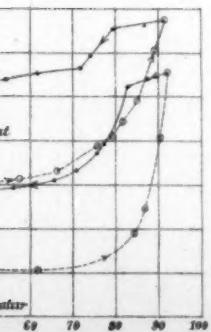
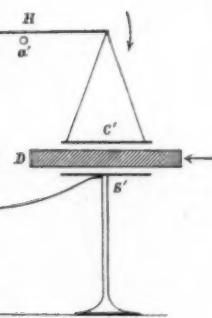
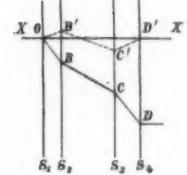


Fig. 15.

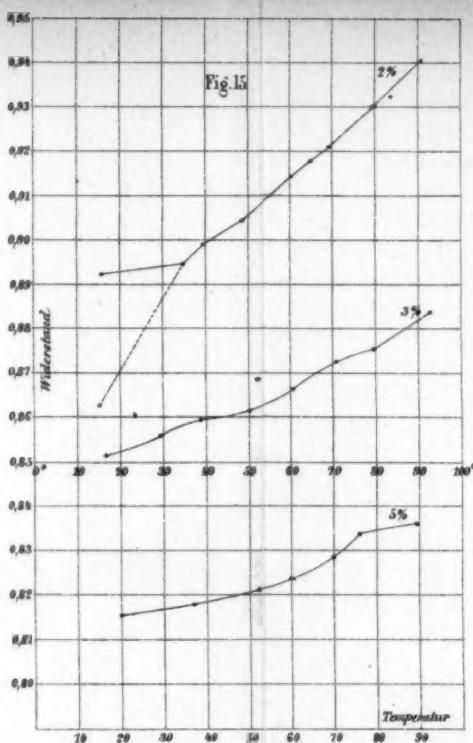


Fig. 16.

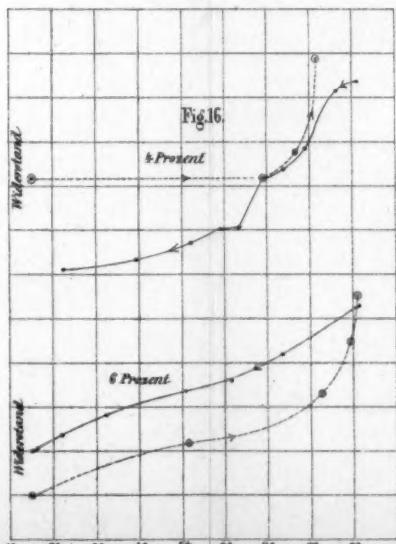


Fig. 18.

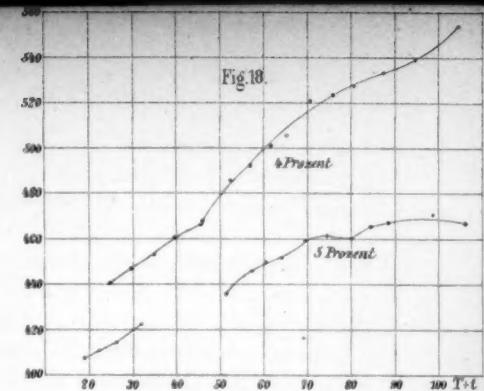
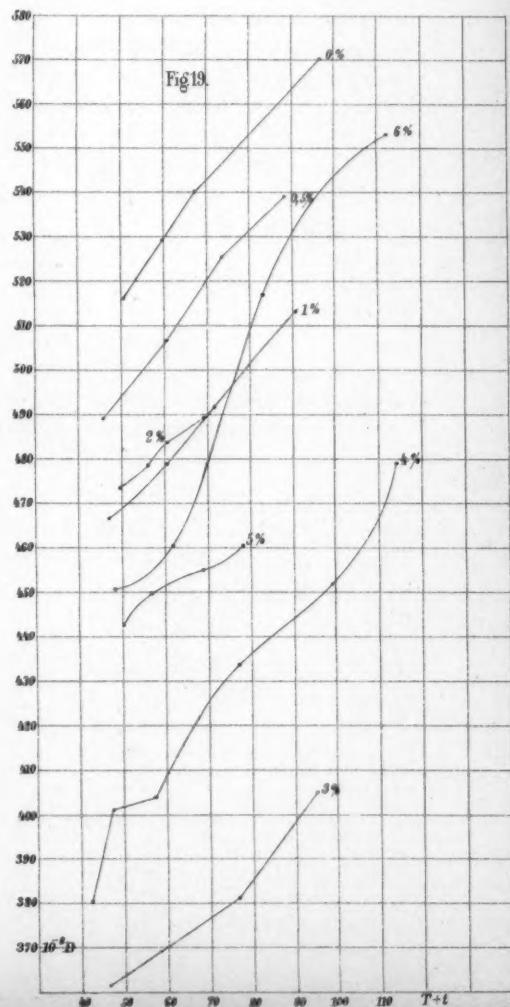


Fig. 19.



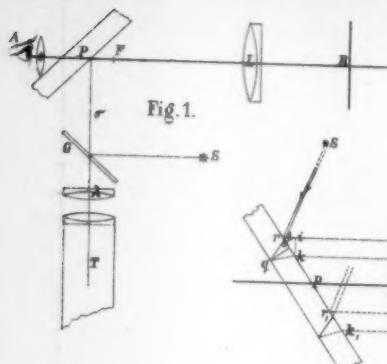


Fig. 1.

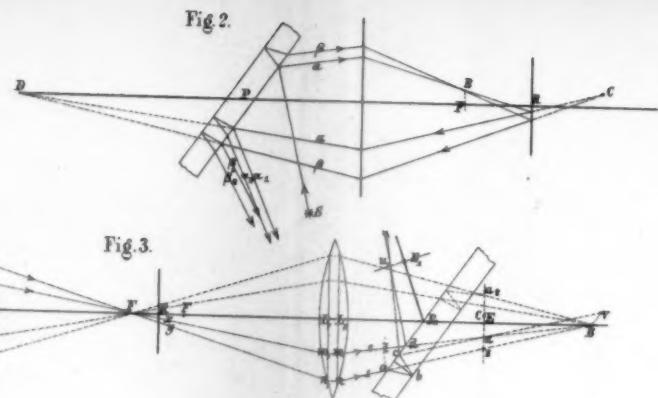


Fig. 3.

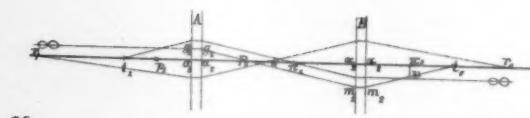


Fig. 4.

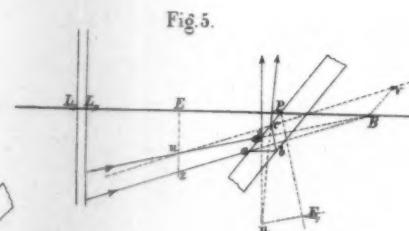


Fig. 5.

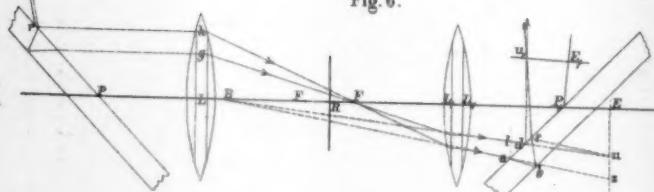


Fig. 6.

Fig. 11.

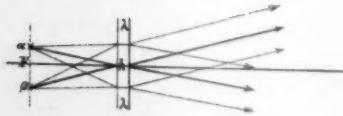


Fig. 7.

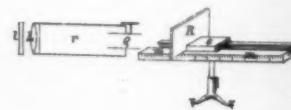
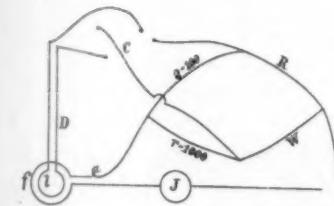


Fig. 8.



Lummer Fig 1-8

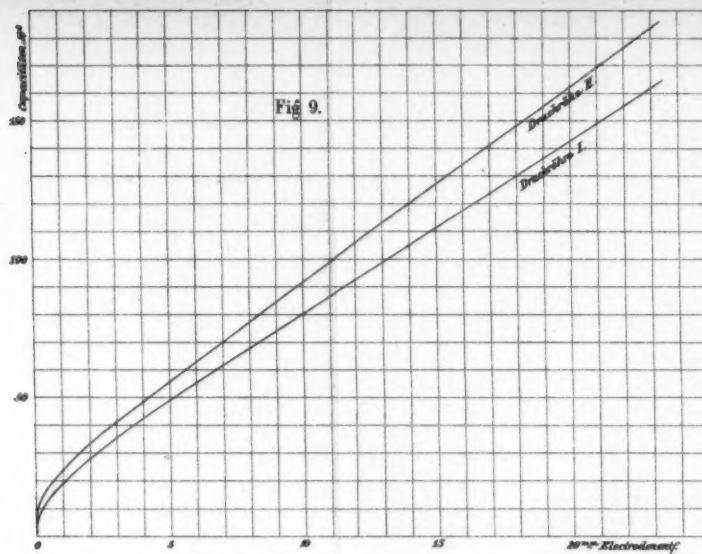


Fig. 9.

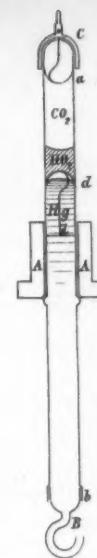


Fig. 12.

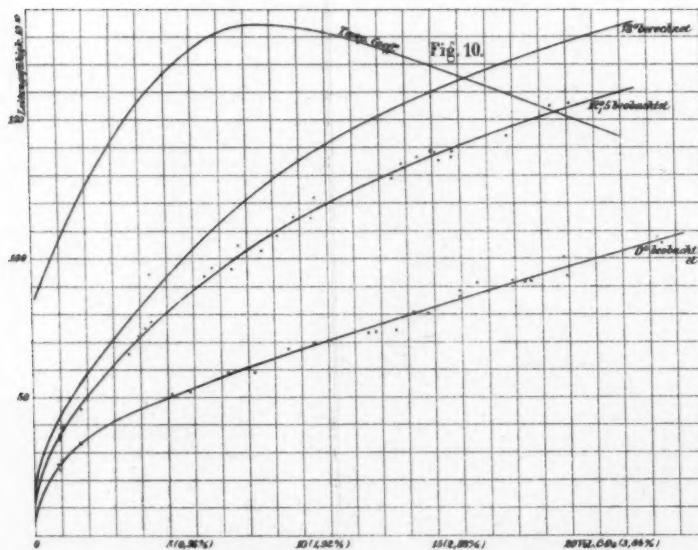


Fig. 10.

Fig. 13.

